

[illegible]

[illegible]

OEUVRES COMPLÈTES

DE

N. H. ABEL,

MATHÉMATICIEN,

AVEC DES NOTES ET DÉVELOPPEMENTS,

RÉDIGÉES PAR ORDRE DU ROI,

PAR

B. HOLMBOE,
professeur de mathématiques à l'université de Christiania, membre de la société physiographique à Christiania et de l'académie royale des sciences de guerre à Stockholm.



TOME SECOND

contenant les oeuvres de l'auteur qui n'ont pas été publiées auparavant.



CHRISTIANIA.
Chez *Chr. Gröndahl*, Imprimeur-Libraire.
1839.

AVERTISSEMENT.

Les mémoires contenus dans ce second volume n'ont pas été publiés auparavant excepté les nos. VII, XVII et XVIII qui ont été insérés dans le journal "Magazin for Naturvidenskaberne" *pour 1823 et 1825, et les nos. XXIII et XXIV qui se trouvent dans le journal de Mr. Crelle tome 3ème et 6ème. Quelques-uns des résultats des mémoires IX et X sont contenus dans un mémoire que l'auteur a fait publier dans le journal* "Det kongelige norske Videnskabersselskabs Skrifter". Trondhjem 1827. *Les six premiers nos. et les nos. XVII jusqu'à XXI ont été écrits par l'auteur en norvégien, le no. XXII en allemand, et les autres en français. Les deux premiers mémoires ne contiennent, comme on voit, que des résultats connus avant notre auteur, mais il est à remarquer qu'il les a écrits immédiatement après avoir lu pour la première fois le calcul des fonctions de* Lagrange *et sans connaissance préalable de l'application de la méthode des variations aux intégrales finies. Tous les mémoires contenus dans ce volume ont été écrits avant que notre auteur commençât ses voyages, excepté les mémoires XV, XVI et XXII, dont malheureusement le premier n'est pas terminé. Parmi les extraits des lettres à Mr. Crelle insérés dans le 3ème volume de son journal, il s'en trouve deux*

*qui ne contiennent que des choses comprises dans le mémoires XII et XXI du premier volume; c'est pourquoi on les a passés ici sous silence. Bien qu'on ait désiré avoir pu consigner dans cette édition le mémoire présenté par l'auteur à l'institut de France vers la fin de l'année **1826** (voy. T. I pag. **288**), tous les efforts pour obtenir une copie de ce mémoire ont été infructueux jusqu'à présent.*

B. HOLMBOE.

I.

Sur les maximums et minimums des intégrales aux différences.

On peut, comme on sait, trouver les conditions pour que l'intégrale d'une différentielle donnée soit un maximum ou un minimum entre des limites déterminées. Je vais dans ce mémoire montrer comment on peut déduire de semblables équations de condition pour des maximums ou minimums des intégrales aux différences.

Considérons une fonction $f(x, y, z, \text{etc. } \Delta x, \Delta y, \Delta z, \ldots \Delta^2 x, \Delta^2 y, \Delta^2 z \ldots)$ de plusieurs variables et de leurs différences finies. Son intégrale est $\Sigma f(x, y, z \text{ etc. } \Delta x, \Delta y, \Delta z \text{ etc.})$, et si cette intégrale doit être un maximum ou un minimum entre certaines limites, il s'ensuit que sa variation doit être égale à zéro. On aura donc,

$$\delta \Sigma f(x, y, z \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \text{etc.}) = 0$$

ou bien

$$\Sigma \delta f(x, y, z \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \text{etc.}) = 0.$$

En effectuant la variation on obtiendra:

$$\Sigma(f'(x) . \delta x + f'(y) . \delta y + f'(z) . \delta z \ldots + f'(\Delta x) . \delta \Delta x + f'(\Delta y) . \delta \Delta y + f'(\Delta z) . \delta \Delta z + \ldots) = 0.$$

Avant d'aller plus loin il faut considérer si entre les variables et leurs différences il y a des équations de condition tant de telles qui ont lieu pour toute l'intégrale que de telles qui n'ont lieu que pour les limites.

Le procédé le plus direct serait d'éliminer de ces équations de condition autant de variations qu'il y a d'équations, et les substituer ensuite dans l'équation précédente; mais cette élimination étant souvent très pénible ou même impratiquable, je me servirai de la méthode employée par *Lagrange* dans le calcul des fonctions. La voici: on multiplie la variation de toute équation de condition par une quantité indéterminée, qui est en général une fonction de x, y et z et on ajoute le produit à l'expression sous le signe d'intégration. Soit donc $\delta v = 0$, $\delta v' = 0$, $\delta v'' = 0$, etc. les variations de ces équations de condition et λ, λ' λ'' etc. des quantités indéterminées, et l'on aura:

$$\Sigma(\delta U + \lambda\delta v + \lambda'\delta v' + \lambda''\delta v'' + \ldots) = 0$$

où
$$U = f(x, y, z \text{ etc. etc.})$$

Maintenant on peut considérer x, y, z etc. comme des variables indépendantes à cause des quantités indéterminées λ, λ', λ'' etc.

Or en substituant pour δU sa valeur; $\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)\delta x + \left(\frac{\delta v}{\delta y}\right)\delta y +$ etc. pour δv et $\left(\frac{\delta v'}{\delta x}\right).\,\delta x + \left(\frac{\delta v'}{\delta y}\right).\,\delta y + \ldots$ etc. pour $\delta v'$ etc. on obtiendra:

$$\left.\begin{array}{l}
\Sigma\delta x\left[f'(x) \quad + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta x}\right) + \ldots\right] \\
+ \ \Sigma\delta\Delta x\left[f'(\Delta x) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta\Delta x}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta\Delta x}\right) + \ldots\right] \\
+ \Sigma\delta\Delta^2 x\left[f'(\Delta^2 x) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta\Delta^2 x}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta\Delta^2 v}\right) + \ldots\right] \\
+ \ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.} \\
+ \ \Sigma\delta y\left[f'(y) \quad + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta y}\right) + \ldots,\right] \\
+ \ \Sigma\delta\Delta y\left[f'(\Delta y) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta\Delta y}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta\Delta y}\right) + \ldots\right] \\
+ \Sigma\delta\Delta^2 y\left[f'(\Delta^2 y) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta\Delta^2 y}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta\Delta^2 y}\right) + \ldots\right] \\
+ \ \text{etc.} \qquad \text{etc.} \qquad \text{etc.}
\end{array}\right\} = 0$$

Soit pour abréger

$$\varphi x = f'(x) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right) + \text{etc.}, \ \varphi(\Delta x) = f'(\Delta x) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta\Delta x}\right) + \text{etc.}$$

$$\varphi y = f'(y) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right) + \text{etc.}, \ \varphi(\Delta y) = f'(\Delta y) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta\Delta y}\right) + \text{etc.}$$

etc.

et l'on aura

$$\Sigma\delta x.\varphi(x) + \Sigma\delta y\varphi(y) + \ldots + \Sigma\delta\Delta x.\varphi(\Delta x) + \Sigma\delta\Delta y.\varphi(\Delta y) + \ldots + \Sigma\delta\Delta^2 x.\varphi(\Delta^2 x) + \Sigma\delta\Delta^2 y\varphi(\Delta^2 y) + \ldots = 0.$$

Pour développer ces intégrales je me servirai de la formule suivante:

$$\Sigma F(x)\Delta p = p.F(x - \Delta x) - \Sigma p.\Delta F(x - \Delta x)$$

dont on peut prouver la justesse en en prenant la différence finie. En faisant $F(x) = \varphi(\Delta x)$ et $p = \delta x$, on aura:

$$\Sigma\varphi(\Delta x)\delta\Delta x = \delta x.\varphi\big(\Delta(x - \Delta x)\big) - \Sigma\delta x.\Delta\varphi\big(\Delta(x - \Delta x)\big).$$

En faisant $F(x) = \varphi(\Delta^2 x)$ et $p = \delta\Delta x$, on aura:

$$\Sigma\varphi(\Delta^2 x)\delta\Delta^2 x = \Delta\delta x.\varphi\big(\Delta^2(x - \Delta x)\big) - \Sigma\Delta\delta x.\Delta\varphi\big(\Delta^2(x - \Delta x)\big);$$

or $\Sigma\Delta\delta x.\Delta\varphi\big(\Delta^2(x - \Delta x)\big) = \delta x.\Delta\varphi\big(\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)\big) - \Sigma\delta x.\Delta^2\varphi\big(\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)\big),$

donc

$$\Sigma\varphi(\Delta^2x)\Delta^2\delta x = \Delta\delta x.\varphi[\Delta^2(x-\Delta x)] - \delta x.\Delta\varphi[\Delta^2(x-2\Delta x+\Delta^2x)] + \Sigma\delta x.\Delta^2\varphi[\Delta^2(x-2\Delta x+\Delta^2x)]$$

On obtiendra de la même manière en faisant $F(x)=\varphi(\Delta^3x)$ et $p=\Delta^2\delta x$,

$$\Sigma\varphi(\Delta^3x)\Delta^3\delta x = \Delta^2\delta x.\varphi[\Delta^3(x-\Delta x)] - \Delta\delta x.\Delta\varphi[\Delta^3(x-2\Delta x+\Delta^2x)] + \delta x.\Delta^2\varphi[\Delta^3(x-3\Delta x+3\Delta^2x-\Delta^3x)]$$
$$- \Sigma\delta x.\Delta^3\varphi[\Delta^3(x-3\Delta x+3\Delta^2x-\Delta^3x)].$$

$$\Sigma\varphi(\Delta^4x)\Delta^4\delta x = \Delta^3\delta x.\varphi[\Delta^4(x-\Delta x)] - \Delta^2\delta x.\Delta\varphi[\Delta^4(x-2\Delta x+\Delta^2x)] + \Delta\delta x.\Delta^2\varphi[\Delta^4(x-3\Delta x+3\Delta^2x-\Delta^3x)]$$
$$- \delta x.\Delta^3\varphi[\Delta^4(x-4\Delta x+6\Delta^2x-4\Delta^3x+\Delta^4x)] + \Sigma\delta x.\Delta^4\varphi[\Delta^4(x-4\Delta x+6\Delta^2x-4\Delta^3x+\Delta^4x)].$$

De la même manière on trouvera par rapport à y,

$$\Sigma\varphi(\Delta y).\Delta\delta y = \delta y.\varphi[\Delta(y-\Delta y)] - \Sigma\delta y.\Delta\varphi[\Delta(y-\Delta y)]$$
$$\Sigma\varphi(\Delta^2y).\Delta^2\delta y = \Delta\delta y.\varphi[\Delta^2(y-\Delta y)] - \delta y\Delta\varphi[\Delta^2(y-2\Delta y+\Delta^2y)] + \Sigma\delta y\Delta^2\varphi(\Delta^2(y-2\Delta y+\Delta^2y)]$$
$$\Sigma\varphi(\Delta^3y).\Delta^3\delta y = \Delta^2\delta y\varphi[\Delta^3(y-\Delta y)] - \Delta\delta y.\Delta\varphi[\Delta^3(y-2\Delta y+\Delta^2y)] + \delta y\Delta^2\varphi[\Delta^3(y-3\Delta y+3\Delta^2y-\Delta^3y)]$$
$$- \Sigma\delta y.\Delta^3\varphi[\Delta^3(y-3\Delta y+3\Delta^2y-\Delta^3y)].$$

En général on trouvera de la même manière:

$$\Sigma\varphi(\Delta^ny)\Delta^n\delta y = \Delta^{n-1}\delta y.\varphi[\Delta^n(y-\Delta y)] - \Delta^{n-2}\delta y.\Delta\varphi[\Delta^n(y-2\Delta y+\Delta^2y)] + \Delta^{n-3}\delta y.\Delta^2\varphi[\Delta^n(y-3\Delta y+3\Delta^2y-\Delta^3y)]$$
$$- \Delta^{n-4}\delta y\Delta^3\varphi[\Delta^n(y-4\Delta y+6\Delta^2y-4\Delta^3y+\Delta^4y)] + \dots$$
$$\dots \pm \Delta^{n-m}\delta y.\Delta^{m-1}\varphi\left[\Delta^n\left(y - m\Delta y + \frac{m(m-1)}{2}\Delta^2y - \frac{m(m-1)(m-2)}{2\,.\,3}.\Delta^3y + \dots \pm m\Delta^{m-1}y \mp \Delta^m y\right)\right]$$
$$\dots \pm \delta y\,.\,\Delta^{n-1}\varphi\left[\Delta^n\left(y - n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2y - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\Delta^3y + \dots \mp n\Delta^{n-1}y \pm \Delta^n y\right)\right]$$
$$\mp \Sigma\delta y\,.\,\Delta^n\varphi\left[\Delta^n\left(y - n\Delta y + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2y - \frac{n(n-1)(n-2)}{2\,.\,3}\Delta^3y + \dots \mp n\Delta^{n-1}y \pm \Delta^n y\right)\right].$$

D'une manière semblable on développera les intégrales par rapport aux variables restantes.

En substituant maintenant les intégrales ainsi développées, et rassemblant les termes multipliés respectivement par δx, $\Delta\delta x$, $\Delta^2\delta x \dots \delta y$, $\Delta\delta y$, $\Delta^2\delta y \dots$ etc. on obtiendra la formule suivante:

$$\Sigma(\delta U + \lambda\delta v + \lambda'\delta v' + \lambda''\delta v'' + \dots) =$$
$$+ \Sigma\delta x.(\varphi(x) - \Delta\varphi[\Delta(x-\Delta x)] + \Delta^2\varphi[\Delta^2(x-2\Delta x+\Delta^2x)] - \Delta^3\varphi[\Delta^3(x-3\Delta x+3\Delta^2x-\Delta^3x)] + \text{etc.})$$
$$+ \Sigma\delta y.(\varphi(y) - \Delta\varphi[\Delta(y-\Delta y)] + \Delta^2\varphi[\Delta^2(y-2\Delta y+\Delta^2y)] - \Delta^3\varphi[\Delta^3(y-3\Delta y+3\Delta^2y-\Delta^3y)] + \text{etc.})$$
$$+ \Sigma\delta z.(\varphi(z) - \Delta\varphi[\Delta(z-\Delta z)] + \Delta^2\varphi[\Delta^2(z-2\Delta z+\Delta^2z)] - \Delta^3\varphi[\Delta^3(z-3\Delta z+3\Delta^2z-\Delta^3z)] + \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$
$$+ \delta x.(\varphi[\Delta(x-\Delta x)] - \Delta\varphi[\Delta^2(x-2\Delta x+\Delta^2x)] + \Delta^2\varphi[\Delta^3(x-3\Delta x+3\Delta^2x-\Delta^3x)] - \text{etc.})$$
$$+ \delta y.(\varphi[\Delta(y-\Delta y)] - \Delta\varphi[\Delta^2(y-2\Delta y+\Delta^2y)] + \Delta^2\varphi[\Delta^3(y-3\Delta y+3\Delta^2y-\Delta^3y)] - \text{etc.})$$
$$+ \delta z.(\varphi[\Delta(z-\Delta z)] - \Delta\varphi[\Delta^2(z-2\Delta z+\Delta^2z)] + \Delta^2\varphi[\Delta^3(z-3\Delta z+3\Delta^2z-\Delta^3z)] - \text{etc.})$$
$$+ \text{etc.}$$

$+ \Delta\delta x.\left(\varphi[\Delta^2(x-\Delta x)]-\Delta\varphi[\Delta^3(x-2\Delta x+\Delta^2 x)]+\Delta^2\varphi[\Delta^4(x-3\Delta x+3\Delta^2 x-\Delta^3 x)]-\text{etc.}\right)$

$+ \Delta\delta y.\left(\varphi[\Delta^2(y-\Delta y)]-\Delta\varphi[\Delta^3(y-2\Delta y+\Delta^2 y)]+\Delta^2\varphi[\Delta^4(y-3\Delta y+3\Delta^2 y-\Delta^3 y)]-\text{etc.}\right)$

$+ \Delta\delta z.\left(\varphi[\Delta^2(z-\Delta z)]-\Delta\varphi[\Delta^3(z-2\Delta z+\Delta^2 z)]+\Delta^2\varphi[\Delta^4(z-3\Delta z+3\Delta^2 z-\Delta^3 z)]-\text{etc.}\right)$

+ etc.

$+ \Delta^2\delta x.\left(\varphi[\Delta^3(x-\Delta x)]-\Delta\varphi[\Delta^4(x-2\Delta x+\Delta^2 x)]+\Delta^2\varphi[\Delta^5(x-3\Delta x+3\Delta^2 x-\Delta^3 x)]-\text{etc.}\right)$

$+ \Delta^2\delta y.\left(\varphi[\Delta^3(y-\Delta y)]-\Delta\varphi[\Delta^4(y-2\Delta y+\Delta^2 y)]+\Delta^2\varphi[\Delta^5(y-3\Delta y+3\Delta^2 y-\Delta^3 y)]-\text{etc.}\right)$

$+ \Delta^2\delta z.\left(\varphi[\Delta^3(z-\Delta z)]-\Delta\varphi[\Delta^4(z-2\Delta z+\Delta^2 z)]+\Delta^2\varphi[\Delta^5(z-3\Delta z+3\Delta^2 z-\Delta^3 z)]-\text{etc.}\right)$

+ etc. etc.

Maintenant il sera facile de trouver les conditions du maximum ou du minimum. Or si l'éxpression précédente est égale à zéro, il faut, puisque les variations δx, δy et δz sont tout-à-fait indépendantes, que les coefficiens de ces quantités sous le signe d'intégration soient égales à zéro. On aura donc autant d'équations que de quantités variables, et en éliminant λ, λ', λ'', etc. les équations restantes détermineront les relations entre x, y, z, etc. Désignons la partie restante de l'expression par $-P$, soient x', y', z' etc. x'', y'', z'' etc. les valeurs de x, y, z, etc. qui répondent aux limites, et soient P' et P'' les valeurs correspondantes de P, on aura

$$P'' - P' = 0.$$

Cette équation servira à la détermination des limites. S'il y a des équations de condition pour les limites, on doit par leur moyen éliminer autant des variations $\delta x'$, $\delta y'$, etc. $\delta x''$, $\delta y''$, etc. que l'on pourra, et égaler ensuite à zéro les coefficiens des restantes; ou bien on pourra multiplier chacune des équations de condition par un coefficient indéterminé, et l'ajouter ensuite à l'équation $P'' - P' = 0$; on pourra donc considérer toutes les variations comme indépendantes, et égaler leur coefficiens à zéro. Les équations ainsi formées serviront à déterminer les quantités constantes qui entreront dans les relations entre x, y, z, etc.

En égalant à zéro les coefficiens des variations sous le signe d'intégration, on obtiendra les équations suivantes:

$$\text{A)}\begin{cases} 0=\varphi(x)-\Delta\varphi[\Delta(x-\Delta x)]+\Delta^2\varphi[\Delta^2(x-2\Delta x+\Delta^2 x)]-\Delta^3\varphi[\Delta^3(x-3\Delta x+3\Delta^2 x-\Delta^3 x)]+\text{etc.}\\ 0=\varphi(y)-\Delta\varphi[\Delta(y-\Delta y)]+\Delta^2\varphi[\Delta^2(y-2\Delta y+\Delta^2 y)]-\Delta^3\varphi[\Delta^3(y-3\Delta y+3\Delta^2 y-\Delta^3 y)]+\text{etc.}\\ 0=\varphi(z)-\Delta\varphi[\Delta(z-\Delta z)]+\Delta^2\varphi[\Delta^2(z-2\Delta z+\Delta^2 z)]-\Delta^3\varphi[\Delta^3(z-3\Delta z+3\Delta^2 z-\Delta^3 z)]+\text{etc.}\\ \quad\text{etc.}\end{cases}$$

qui par conséquent déterminent les relations nécessaires entre x, y, z, etc. pour que l'intégrale de la fonction proposée soit un maximum ou un minimum.

Scolie. On peut de ces équations tirer les équations de condition pour l'existence du maximum ou du minimum d'une intégrale ordinaire; on n'a pour cela qu'à changer Σ en $\int$ et Δ en d. Les équations (A) deviendront donc:

$$0 = \varphi(x) - d.\varphi(dx) + d^2\varphi(d^2x) - d^3\varphi(d^3x) + \ldots$$
$$0 = \varphi(y) - d.\varphi(dy) + d^2\varphi(d^2y) - d^3\varphi(d^3y) + \ldots$$
$$0 = \varphi(z) - d.\varphi(dz) + d^2\varphi(d^2z) - d^3\varphi(d^3z) + \ldots$$

etc.

qui sont les équations connues.

Je vais maintenant montrer l'application de la théorie précédente à quelques exemples.

1. Parmi tous les polygones dont les côtes sont donnés en grandeur et en nombre, trouver celui dont l'aire est un maximum.

Supposons que l'axe des abscisses coïncide avec l'un des côtes du polygone et que x et y soient les coordonnées, l'expression de l'aire sera donc $\Sigma(y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta x$. On a par conséquent $f(x, y, \Delta x, \Delta y) = (y + \frac{1}{2}\Delta y)\Delta x$. La condition que tous les côtes sont donnés en grandeur est exprimée par l'équation $\delta\sqrt{(\Delta y^2 + \Delta x^2)} = 0 = \delta v$. On aura donc

$$\varphi(x) = f'(x) + \lambda.\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right) = 0, \quad \varphi(\Delta x) = f'(\Delta x) + \lambda.\left(\frac{\delta v}{\delta \Delta x}\right) = y + \tfrac{1}{2}\Delta y + \lambda.\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}$$
$$\varphi(y) = f'(y) + \lambda.\left(\frac{\delta v}{\delta y}\right) = \Delta x, \varphi(\Delta y) = f'(\Delta y) + \lambda.\left(\frac{dv}{\delta \Delta y}\right) = \tfrac{1}{2}\Delta x + \lambda.\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}.$$

Les équations (A) deviendront donc:

$$0 = \varphi(x) - \Delta\varphi(\Delta(x - \Delta x)), \; 0 = \varphi(y) - \Delta\varphi(\Delta(y - \Delta y))$$

ou en mettant $x + \Delta x$ au lieu de x et $y + \Delta y$ au lieu de y,

$$0 = \varphi(x + \Delta x) - \Delta\varphi(\Delta x), \; 0 = \varphi(y + \Delta y) - \Delta\varphi(\Delta y);$$

or $\varphi(x + \Delta x) = 0$, $\varphi(y + \Delta y) = \Delta(x + \Delta x)$ etc. donc

$$0 = -\Delta\left(y + \tfrac{1}{2}\Delta y + \lambda.\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}\right) \text{ et } 0 = \Delta(x + \Delta x) - \Delta\left(\tfrac{1}{2}\Delta x + \lambda.\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}}\right).$$

En intégrant ces deux équations on aura,

$$y + \tfrac{1}{2}\Delta y + \lambda.\frac{\Delta x}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} = c, \; x + \tfrac{1}{2}\Delta x - \lambda.\frac{\Delta y}{\sqrt{(\Delta x^2 + \Delta y^2)}} = c'$$

c et c' étant les constantes arbitraires dues à l'intégration; et lorsqu'on élimine λ,

$$y\Delta y + \tfrac{1}{2}\Delta y^2 + x\Delta x + \tfrac{1}{2}\Delta x^2 = c\Delta y + c'\Delta x$$

or $y\Delta y + \frac{1}{2}\Delta y^2 = \frac{1}{2}\Delta(y^2)$ et $x\Delta x + \frac{1}{2}\Delta x^2 = \frac{1}{2}\Delta(x^2)$, donc

$$\tfrac{1}{2}\Delta(y^2)+\tfrac{1}{2}\Delta(x^2)=c\Delta y+c'\Delta x,$$

multipliant cette équation par 2 et intégrant, on obtiendra,

$$y^2+x^2=2cy+2c'x+c'',$$

et en changeant les constantes arbitraires

$$(y+\alpha)^2+(x+\beta)^2=\gamma^2$$

équation du cercle, d'où il suit, que parmi tous les polygones avec les mêmes côtes, celui qui est inscrit dans le cercle, renferme la plus grande aire.

Quant à l'équation aux limites, $P''-P'=0$, on voit que les limites étant fixes, on a $\delta x'=\delta x''=\delta y'=\delta y''=0$; donc cette équation est satisfaite.

2. Trouver la forme que prend un polygone pesant dont la pesanteur est uniforme, et dont les côtés sont donnés.

On sait par la statique que lorsqu'un système auquel la pesenteur est la seule force agissante, est en équilibre, son centre de gravité sera le plus bas possible. Donc si y' est la distance de ce point à une ligne horizontale, on a $\delta y'=0$. Soit la ligne des abscisses une ligne horizontale dans le plan du polygone, et soient x et y les coordonnées. Or la pesanteur du polygone étant uniforme, le centre de gravité de chaque côté sera situé dans son milieu, donc les coordonnées de ces centres de gravité seront $x+\frac{1}{2}\Delta x$ et $y+\frac{1}{2}\Delta y$, et leur masse $=\Delta s=\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$ en remarquant que les masses sont proportionnelles aux côtes.

On aura donc

$$y'=\frac{\Sigma(y+\frac{1}{2}\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Sigma\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}},\ \delta y'=\delta.\frac{\Sigma(y+\frac{1}{2}\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}{\Sigma\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}}=0$$

ou puisque $\Sigma\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}$ est donnée, $\delta\Sigma(y+\frac{1}{2}\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)}=0$.
donc

$$f(x,y,\Delta x,\Delta y)=(y+\tfrac{1}{2}\Delta y)\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)},\ v=\sqrt{(\Delta x^2+\Delta y^2)};$$

et par suite

$$\varphi(x)=f'(x)+\lambda\left(\frac{\delta v}{\delta x}\right)=0,\ \varphi(\Delta x)=\frac{(y+\frac{1}{2}\Delta y).\Delta x}{\Delta s}+\lambda.\frac{\Delta x}{\Delta s},$$

$$\varphi(y)=\Delta s,\ \varphi(\Delta y)=\tfrac{1}{2}\Delta s+\frac{(y+\frac{1}{2}\Delta y)\Delta y}{\Delta s}+\lambda.\frac{\Delta y}{\Delta s}.$$

Les équations, $0=\varphi(x+\Delta x)-\Delta\varphi(\Delta x)$ et $0=\varphi(y+\Delta y)-\Delta\varphi(\Delta y)$ deviendront donc

$$\Delta\Big((y+\tfrac{1}{2}\Delta y+\lambda)\,\frac{\Delta x}{\Delta s}\Big)=0 \text{ et } \Delta(s+\Delta s)-\Delta\left(\tfrac{1}{2}\Delta s+(y+\tfrac{1}{2}\Delta y+\lambda)\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)=0$$

d'où l'on tire en intégrant

$$(y+\tfrac{1}{2}\Delta y+\lambda)\frac{\Delta x}{\Delta s}=c, \text{ et } s+\tfrac{1}{2}\Delta s-(y+\tfrac{1}{2}\Delta y+\lambda)\frac{\Delta y}{\Delta s}=c'$$

et en éliminant λ, $s+\frac{1}{2}\Delta s-\frac{c\Delta y}{\Delta x}=c'$.

Si les deux extrémités du polygone sont fixes, l'équation aux limites est satisfaite. Lorsque c et c' sont connus, rien n'est plus facil que de construire le polygone; car $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ étant la tangente de l'angle compris entre le côté s et la ligne horizontale, et s et Δs étant donnés dans chaque cas particulier, on connait les côtés et les angles qu'ils forment avec une droite donnée et par conséquent il est facile de construire le polygone. Les constantes c et c' dépendent des coordonnées des extrémités, et des côtés du polygone, et on pourra sans difficulté les trouver; mais comme cela est un peu prolixe, et qu'il n'appartient pas proprement ici, je ne m'y arrèterai pas.

Scolie. Le point essentiel dans l'application des équations générales trouvées plus haut, est l'expression des équations de condition. Cela n'a pas de difficulté lorsque la condition est exprimée directement par une équation p. ex. $\varphi(x, y, z)=0$; car il ne s'agit donc que de varier cette équation, multiplier cette variation par un coefficient indéterminé, et l'ajouter à l'expression sous le signe d'intégration. Si au contraire une certaine relation entre les quantités variables n'est pas constante, mais donnée dans chaque cas particulier, il faut égaler à zéro les variations des quantités qui dans ce cas se changent pour tout accroissement fini Δx, Δy, etc. et de cette manière la condition sera exprimée par une équation. Si p. ex. il s'agit d'un polygone, dont les coordonnées des sommets ont pour chaque cas particulier une certaine relation entre elles, exprimée par l'équation $\varphi(x, y, z, \text{etc. } a)=0$, où a est une quantité, donnée pour chaque sommet, il faut de cette équation tirer $a=F(x, y, z, \text{etc.})$ et faire ensuite $\delta a=0=\delta F(x, y, z, \text{etc.})$. Si la condition était que l'intégrale d'une certaine fonction était donnée entre des limites déterminées, on pourrait faire usage de la méthode suivante: (*Lagrange*).

Soit u la fonction dont l'intégrale est donnée entre les limites données. Je fais $s=\Sigma u$, et la condition sera $\delta s'-\delta s''=0$ puisque la différence $s'-s''$ est donnée. On a donc $\Delta s=u$, ou $\Delta s-u=0$; voilà donc l'équation de condition qui a lieu pour toute l'étendue de l'intégrale, on n'a donc qu'à multiplier la variation de cette équation par un coefficient indéterminé, et l'ajouter à la quantité sous le signe d'intégration, qui devient par là

$$\delta U + \lambda\,(\Delta\delta s - \delta u) + \lambda'\delta v' + \text{etc. donc } \delta v = \delta(\Delta s - u)$$

$$\text{et } \varphi(s) = f'(s) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta s}\right) + \text{etc.} = 0,\quad \varphi(\Delta s) = f'(\Delta s) + \lambda\left(\frac{\delta v}{\delta \Delta s}\right) + \text{etc.} = \lambda$$

car on peut considérer s comme une nouvelle variable. L'équatiou (A) devient donc par rapport à s

$\varphi(s) - \Delta\varphi\big(\Delta(s - \Delta s)\big) = 0$, c'est-à-dire $\Delta\lambda = 0$, donc λ est une constante. L'équation aux limites ne change pas, car $\delta s' - \delta s'' = 0$.

Par rapport aux autres variables on obtiéndra

$$\varphi(x) = f'(x) - a\left(\frac{\delta u}{\delta x}\right) + \lambda'\left(\frac{\delta v'}{\delta x}\right) + \text{etc. en faisant } \lambda = a;$$

et de même pour les autres variables.

Or on obtiendrait les mêmes valeurs en mettant $U - au$ au lieu de U. On tire de là la regle suivante:

Lorsque l'intégrale d'une fonction U entre des limites données doit être un maximum ou un minimum, et l'intégrale d'une autre fonction u entre les mêmes limites doit avoir une valeur donnée, on n'a qu'à chercher le maximum ou le minimum de l'intégrale $U - au$, où a est une quantité constante.

On voit de la même manière que si l'on a plusieurs fonctions u, u', u'', etc. dont les intégrales ont des valeurs déterminées, il faut seulement chercher le maximum ou le minimum de l'intégrale $U - au - a'u' - a''u''$ — etc. où a, a', a'' etc. sont des quantités constantes.

II.

Sur les conditions nécessaires pour que l'intégrale finie d'une fonction de plusieurs variables et de leurs différences soit intégrable lorsque les variables sont indépendantes l'une de l'autre, ou en d'autres termes pour qu'une telle fonction soit une différence complète.

Soit U la fonction donnée qui doit être une différence complète, et ΣU son intégrale.

Or si ΣU est l'intégrale d'une différence complète

$\delta\Sigma U$ le sera de même; car si on a $\Sigma U = V$, on aura

$\delta\Sigma U = \delta V$. Ayant donc $U = f(x, y, z \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots \Delta^2 x; \Delta^2 y, \Delta^2 z \ldots)$ on aura d'après le mémoire précédent

$$\Sigma\delta U = \Sigma\delta x . P + \Sigma\delta y . Q + \Sigma\delta z . R + \ldots + \alpha$$

où $P = f'(x) - \Delta f'(\Delta(x - \Delta x)) + \Delta^2 f'(\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)) - \text{etc.}$

$Q = f'(y) - \Delta f'(\Delta(y - \Delta y)) + \Delta^2 f'(\Delta^2(y - 2\Delta y + \Delta^2 y)) - \text{etc.}$

etc.

et α est la partie hors du signe d'intégration.

Or δx, δy, δz étant tout-à-fait indépendantes, il s'ensuit que $\Sigma\delta x . P$, $\Sigma\delta y . Q$, $\Sigma\delta z . R$, etc. ne sauraient être intégrables à moins que l'on n'ait $P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$, etc. De là on tire le théorème suivant:

Pour qu'une fonction de plusieurs variables et de leur différences finies, $f(x, y, z \ldots \Delta x, \Delta y, \Delta z \ldots)$ soit une différence complète, il faut qu'on ait les équations de condition suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= f'(x) - \Delta f'[\Delta(x - \Delta x)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(x - 2\Delta x + \Delta^2 x)] - \Delta^3 f'[\Delta^3(x - 3\Delta x + 3\Delta^2 x - \Delta^3 x)] + \text{etc.} \\
0 &= f'(y) - \Delta f'[\Delta(y - \Delta y)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(y - 2\Delta y + \Delta^2 y)] - \Delta^3 f'[\Delta^3(y - 3\Delta y + 3\Delta^2 y - \Delta^3 y)] + \text{etc.} \\
0 &= f'(z) - \Delta f'[\Delta(z - \Delta z)] + \Delta^2 f'[\Delta^2(z - 2\Delta z + \Delta^2 z)] - \Delta^3 f'[\Delta^3(z - 3\Delta z + 3\Delta^2 z - \Delta^3 z)] + \text{etc.} \\
&\text{etc.}
\end{aligned}\right\} (B)$$

Ces équations sont donc les mêmes que celles qui ont lieu lorsque ΣU est un maximum ou un minimum entre des limites données. Les équations (B)

sont donc nécessaires pour que U soit une différence complète; que ces mêmes équation sont aussi suffisantes pour cet effet, ou que la fonction U doit nécessairement être une différence complète lorsque ces équations ont lieu, se fait voir comme suit.

En vertu des équations (B) on a

$$\delta\Sigma U = \delta x . P' + \delta y . Q' + \text{etc. } \delta\Delta x . P'' + \delta\Delta y . Q'' + \text{etc.}$$

et en intégrant

$$\Sigma U = \int(dx . P' + dy . Q' + \text{etc. } d\Delta x . P'' + d\Delta y . Q'' + \text{etc.}$$

Donc pour que U soit une différence complète, il faut que $dx . P' + dy . Q' + \ldots + d\Delta x . P'' + d\Delta y . Q'' +$ etc. soit une différentielle complète. Il faut donc qu'on ait

$$\left(\frac{dP'}{dy}\right) = \left(\frac{dQ'}{dx}\right), \left(\frac{dP'}{dz}\right) = \left(\frac{dR'}{dx}\right), \text{ etc. } \left(\frac{dP''}{d\Delta y}\right) = \left(\frac{dQ''}{d\Delta x}\right), \text{ etc.}$$

Or on voit aisément qu'on tire des équations (B) par intégration

$$P' = \Sigma f'(x), Q' = \Sigma f'(y) \text{ etc. } P'' = \Sigma^2 f'(x + \Delta x) - \Sigma f'(\Delta x), Q'' = \Sigma^2 f'(y + \Delta y) - \Sigma f'(\Delta y), \text{ etc.}$$

$$P''' = \Sigma^3 f'(x + 2\Delta x + \Delta^2 x) - \Sigma^2 f'(\Delta(x + \Delta x)) + \Sigma f'(\Delta^2 x) \text{ etc.}$$

On aura donc par là $\left(\frac{dP'}{dy}\right) = \Sigma f''(x, y)$ et $\left(\frac{dQ'}{dx}\right) = \Sigma f''(x, y)$

$$\left(\frac{dP''}{d\Delta y}\right) = \Sigma^2 f''(x + \Delta x, \Delta y) - \Sigma f''(\Delta x, \Delta y), \left(\frac{dQ''}{d\Delta x}\right) = \Sigma^2 f''(y + \Delta y, \Delta x) - \Sigma f''(\Delta x, \Delta y)$$

etc.

On voit donc que les condition nécessaires et suffisantes sont satisfaites. La fonction U sera donc nécessairement une différence complète, lorsque les équations (B) ont lieu.

Pour une application plus commode des équations (B) je me servirai de la signification suivante:

Lorsque dans une fonction U au lieu des variables on met les mêmes, augmentées de leurs différences finies, je signifierai cette opération par EU de sorte que $EU = U + \Delta U$. La répétition de la même substitution sera signifiée par $E^2 U = EEU = U + 2\Delta U + \Delta^2 U$. Si au contraire au lieu de x on met $x - \Delta x$, cela sera signifié par $E^{-1}U$, $E^{-2}U$ etc. Les équations (B) deviendront par là:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= f'(x) - \Delta E^{-1} f'(\Delta x) + \Delta^2 E^{-2} f'(\Delta^2 x) - \Delta^3 E^{-3} f'(\Delta^3 x) + \Delta^4 E^{-4} f'(\Delta^4 x) \ldots \\ 0 &= f'(y) - \Delta E^{-1} f'(\Delta y) + \Delta^2 E^{-2} f'(\Delta^2 y) - \Delta^3 E^{-3} f'(\Delta^3 y) + \Delta^4 E^{-4} f'(\Delta^4 y) \ldots \\ 0 &= f'(z) - \Delta E^{-1} f'(\Delta z) + \Delta^2 E^{-2} f'(\Delta^2 z) - \Delta^3 E^{-3} f'(\Delta^3 z) + \Delta^4 E^{-4} f'(\Delta^4 z) \ldots \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} (C)$$

On aura de même:

$$\begin{aligned}\Sigma U = & \int dx.[E^{-1}f'(\Delta x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^2 x) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^3 x) - ..] \\ & + \int dy.[E^{-1}f'(\Delta y) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^2 y) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^3 y) - ..] \\ & + \text{etc.} \\ & + \int d\Delta x.[E^{-1}f'(\Delta^2 x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^3 x) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^4 x) - ..] \\ & + \int d\Delta y.[E^{-1}f'(\Delta^2 y) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^3 y) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^4 y) - ..] \\ & + \text{etc.} \\ & + \int d\Delta^2 x[E^{-1}f'(\Delta^3 x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^4 x) + ..] \\ & + \int d\Delta^2 y[E^{-1}f'(\Delta^3 y) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^4 y) + ..] \\ & + \text{etc. etc.}\end{aligned}$$

Je vais appliquer cela à quelques exemples.

1. Rechercher si $\log\left(\frac{x-\Delta^2 x}{x-\Delta x}\right)$ est une différence complète.

On a ici $f(x, \Delta x, \Delta^2 x) = \log(x - \Delta^2 x) - \log(x - \Delta x)$, on aura donc:

$$f'(x) = \frac{1}{x-\Delta^2 x} - \frac{1}{x-\Delta x},\ f'(\Delta x) = \frac{1}{x-\Delta x},\ f'(\Delta^2 x) = -\frac{1}{x-\Delta^2 x}.$$

Les équations (C) deviendront donc:

$$\frac{1}{x-\Delta^2 x} - \frac{1}{x-\Delta x} - \Delta E^{-1}\frac{1}{x-\Delta x} - \Delta^2 E^{-2}\frac{1}{x-\Delta^2 x} = 0, \text{ ou bien}$$

$$\frac{1}{x-\Delta^2 x} - \frac{1}{x-\Delta x} - \Delta\frac{1}{E^{-1}x - E^{-1}\Delta x} - \Delta^2\frac{1}{E^{-2}x - E^{-2}\Delta^2 x} = 0.$$

or $\Delta^2 x = E^2 x - 2Ex + x$, $\Delta x = Ex - x$, donc

$$\frac{1}{2Ex - E^2 x} - \frac{1}{2x - Ex} - \Delta\frac{1}{2E^{-1}x - x} - \Delta^2\frac{1}{2E^{-1}x - x} = 0, \text{ d'où enfin}$$

$$\frac{1}{2Ex - E^2 x} - \frac{1}{2x - Ex} - \frac{1}{2x - Ex} + \frac{1}{2E^{-1}x - x} + \frac{1}{2Ex - E^2 x} + \frac{2}{2x - Ex} - \frac{1}{2E^{-1}x - x} = 0.$$

Or cette dernière équation étant identique, on en conclut que $\log\left(\frac{x-\Delta^2 x}{x-\Delta x}\right)$ est une différence complète, et que

$$\Sigma\log\left(\frac{x-\Delta^2 x}{x-\Delta x}\right) = \int dx\left(E^{-1}.\frac{1}{x-\Delta x} + E^{-2}\Delta\frac{1}{x-\Delta^2 x}\right) + \text{etc.} = E^{-2}\int dx\left(\frac{1}{Ex - E\Delta x} + \Delta.\frac{1}{x-\Delta^2 x}\right) + \ldots = \int\left(\frac{dx}{x-\Delta x} - \frac{d\Delta x}{x-\Delta x}\right) = \log(x - \Delta x).$$

Par rapport à E on doit remarquer les relations suivantes:

$E\varphi(u) = \varphi(EU)$, $E(\Delta U) = \Delta(EU)$, $\Sigma(EU) = E(\Sigma U)$, $E^n\Delta^m U = \Delta^m E^n U$, $E^n\Sigma^m U = \Sigma^m E^n U$.

$$E^n U = U + n\Delta U + \frac{n(n-1)}{2}\Delta^2 U + \frac{n(n-1)(n-2)}{2.3}\Delta^3 U + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

$$E^{-n} U = U - n\Delta U + \frac{n(n+1)}{2}\Delta^2 U - \frac{n(n+1)(n+2)}{2.3}\Delta^3 U + \text{etc.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

$$E^n \varDelta^m U = \varDelta^m U + n\varDelta^{m+1} U + \frac{n(n-1)}{2} \varDelta^{m+2} U + \text{etc.} \quad (3)$$

$$E^{-n} \varDelta^m U = \varDelta^m U - n\varDelta^{m+1} U + \frac{n(n+1)}{2} \varDelta^{m+2} U - \text{etc.} \quad (4)$$

$$\varDelta^m U = E^m U - mE^{m-1} U + \frac{m(m-1)}{2} E^{m-2} U - \text{etc.} \quad (5)$$

$$E^n \varDelta^m U = E^{m+n} U - mE^{m+n-1} U + \frac{m(m-1)}{2} E^{m+n-2} U - \text{etc.} \quad (6)$$

$$E^{-n} \varDelta^m U = E^{m-n} U - mE^{m-n-1} U + \frac{m(m-1)}{2} E^{m-n-2} U - \text{etc.} \quad (7)$$

2. Rechercher si $e^x(e^{\varDelta x}-1)$ est une différence complète.

On a ici $f'(x) = e^x(e^{\varDelta x}-1)$, $f'(\varDelta x) = e^{\varDelta x} e^x$, donc $f'(x) - E^{-1}\varDelta f'(\varDelta x)$ $= e^x(e^{\varDelta x}-1) - \varDelta E^{-1}(e^{x+\varDelta x}) = e^x(e^{\varDelta x}-1) - \varDelta e^x = e^x(e^{\varDelta x}-1) - e^{x+\varDelta x} + e^x = 0$, donc $e^x(e^{\varDelta x}-1)$ est une différence complète, et $\Sigma\big(e^x(e^{\varDelta x}-1)\big) = \int dx\,.(E^{-1}e^{\varDelta x}e^x)$ $= \int dx\,.e^x = e^x$, ce qui est connu.

Considérons maintenant l'intégrale double $\Sigma^2 U$. Pour que cette intégrale soit exprimable, il faut que ΣU le soit de même. Donc d'abord les équations (C) doivent être satisfaites. Mais outre ces équations on en aura un nombre pareil qui se trouve comme il suit. Soit $U = f(x, \varDelta x, \varDelta^2 x, \ldots y, \varDelta y, \varDelta^2 y \ldots)$, on a, lorsque les équations (C) ont lieu:

$$\begin{aligned}\Sigma^2\delta U = \Sigma\delta x\,.\,&[E^{-1}f'(\Delta x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^2 x) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^3 x) - \text{etc.}]\\ + \Sigma\delta\Delta x\,&[E^{-1}f'(\Delta^2 x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^3 x) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^4 x) - \text{etc.}]\\ + \Sigma\delta\Delta^2 x&[E^{-1}f'(\Delta^3 x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^4 x) + \ldots\ \text{etc.}]\\ + \text{etc.}&\end{aligned}$$

ou en faisant usage de la notation abrégée:

$$\begin{aligned}\Sigma^2\delta U = &\,\Sigma[\delta x\,.\,\varphi(\Delta x) + \delta\Delta x\,.\,\varphi(\Delta^2 x) + \delta\Delta^2 x\,.\,\varphi(\Delta^3 x) + \ldots]\\ &+ \Sigma[\delta y\,.\,\varphi(\Delta y) + \delta\Delta y\,.\,\varphi(\Delta^2 y) + \delta\Delta^2 y\,.\,\varphi(\Delta^3 y) + \ldots]\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

Or pour que toutes ces intégrales soient exprimables, on doit avoir, d'après ce qui précède, les équations de condition suivantes:

$$0 = \varphi(\Delta x) - E^{-1}\Delta\varphi(\Delta^2 x) + E^{-2}\Delta^2\varphi(\Delta^3 x) - E^{-3}\Delta^3\varphi(\Delta^4 x) + \text{etc.}$$

$$0 = \varphi(\Delta y) - E^{-1}\Delta\varphi(\Delta^2 y) + E^{-2}\Delta^2\varphi(\Delta^3 y) - E^{-3}\Delta^3\varphi(\Delta^4 y) + \text{etc.}$$

Substituant ici les valeurs de $\varphi(\varDelta x)$, $\varphi(\varDelta^2 x)$, $\varphi(\varDelta^3 x)$ etc. on obtiendra:

$$\left.\begin{aligned}E^{-1}f'(\Delta x) - \Delta E^{-2}f'(\Delta^2 x) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^3 x) - \Delta^3 E^{-4}f'(\Delta^4 x) + \text{etc.}\\ - \Delta E^{-2}f'(\Delta^2 x) + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^3 x) - \Delta^3 E^{-4}f'(\Delta^4 x) + \text{etc.}\\ + \Delta^2 E^{-3}f'(\Delta^3 x) - \Delta^3 E^{-4}f'(\Delta^4 x) + \text{etc.}\\ - \Delta^3 E^{-4}f'(\Delta^4 x) + \text{etc.}\end{aligned}\right\} = 0$$

donc en ajoutant:

$$E^{-1}f'(\Delta x)-2E^{-2}\Delta f'(\Delta^2 x)+3E^{-3}\Delta^2 f'(\Delta^3 x)-4E^{-4}\Delta^3 f'(\Delta^4 x)+\text{etc.}=0.$$

On aura des équations semblables par rapport aux autres variables; et lorsque dans ces équations on met $x+\Delta x$ au lieu de x, on obtiendra outre les équations (C) celles-ci:

$$\left.\begin{array}{l} 0=f'(\Delta x)-2\Delta E^{-1}f'(\Delta^2 x)+3\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^3 x)-4\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^4 x)+\text{etc.}\\ 0=f'(\Delta y)-2\Delta E^{-1}f'(\Delta^2 y)+3\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^3 y)-4\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^4 y)+\text{etc.}\\ 0=f'(\Delta z)-2\Delta E^{-1}f'(\Delta^2 z)+3\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^3 z)-4\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^4 z)+\text{etc.}\end{array}\right\}(D)$$

+ etc.

Si l'on veut de plus que $\Sigma^3 U$ soit exprimable, il faut aux équations (C) et (D) encore ajouter les suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} 0=f'(\Delta^2 x)-3\Delta E^{-1}f'(\Delta^3 x)+6\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^4 x)-10\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^5 x)+\dots\\ 0=f'(\Delta^2 y)-3\Delta E^{-1}f'(\Delta^3 y)+6\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^4 y)-10\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^5 y)+\dots\\ 0=f'(\Delta^2 z)-3\Delta E^{-1}f'(\Delta^3 z)+6\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^4 z)-10\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^5 z)+\dots\end{array}\right\}(E)$$

+ etc.

Si l'on demande que $\Sigma^m U$ soit une intégrale complète, il faut aux équations de condition nécessaires pour que $\Sigma^{m-1}U$ soit une intégrale complète ajouter les suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} 0=f'(\Delta^{m-1}x)-a\Delta E^{-1}f'(\Delta^m x)+a'\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^{m+1}x)-a''\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^{m+2}x)+\text{etc.}\\ 0=f'(\Delta^{m-1}y)-a\Delta E^{-1}f'(\Delta^m y)+a'\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^{m+1}y)-a''\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^{m+2}y)+\text{etc.}\\ 0=f'(\Delta^{m-1}z)-a\Delta E^{-1}f'(\Delta^m z)+a'\Delta^2 E^{-2}f'(\Delta^{m+1}z)-a''\Delta^3 E^{-3}f'(\Delta^{m+2}z)+\text{etc.}\end{array}\right\}(F)$$

+ etc.

où l'on a:

$$a=m,\ a'=\frac{m(m+1)}{2},\ a''=\frac{m(m+1)(m+2)}{2\,.\,3},\ a'''=\frac{m(m+1)(m+2)(m+3)}{2\,.\,3\,.\,4}\ \text{etc.}\dots$$

$$\dots a^{(n)}=\frac{m(m+1)(m+2)\dots(m+n-1)(m+n)}{2\,.\,3\,.\,4\,\dots\,(n+1)}$$

A l'aide de ces équations on peut donc décider si une fonction de plusieurs variables et de leurs différences, est une différence complète d'un ordre quelconque.

III.

De la fonction transcendante $\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$.

Comme l'intégrale $\int\frac{dx}{x}$ est la première fonction transcendante qui se présente dans le calcul intégral ordinaire, ainsi $\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$ en est la première qui se présente dans le calcul inverse des différences, où elle est de la même importance que $\int\frac{dx}{x}$ dans le calcul intégral ordinaire. A cause de l'analogie de ces deux fonctions je désignerai $\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$ par Lx, comme on désigne $\int\frac{dx}{x}$ par lx.

Je commencerai par le développement de la fonction Lx en série. Supposons

$$L(a+x)=\alpha+\beta x+\gamma x(x-1)+\delta x(x-1)(x-2)+\varepsilon x(x-1)(x-2)(x-3)+\text{etc.} \quad (1)$$

En prenant la différence finie de part et d'autre, on aura

$\Delta L(a+x)=\frac{1}{a+x}$, $\Delta x=1$, $\Delta x(x-1)=2x$, $\Delta x(x-1)(x-2)=3x(x-1)$, etc. donc

$$\frac{1}{a+x}=\beta+2\gamma x+3\delta x(x-1)+4\varepsilon x(x-1)(x-2)+5\zeta x(x-1)(x-2)(x-3)+\text{etc.}$$

En faisant ici $x=0$, on obtiendra $\frac{1}{a}=\beta$.

Prenant de nouveau les différences finies, on aura

$$\Delta\left(\frac{1}{a+x}\right)=2\gamma+2.3\delta x+3.4.\varepsilon x(x-1)+\text{etc.}$$

$$\Delta^2\left(\frac{1}{a+x}\right)=2.3\delta+2.3.4.\varepsilon x+3.4.5\zeta x(x-1)+\text{etc.}$$

$$\Delta^3\left(\frac{1}{a+x}\right)=2.3.4\varepsilon+2.3.4.5\zeta x+\text{etc.}$$

etc.

et en faisant $x=0$, il viendra

$$2\gamma=\Delta\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a(a+1)},\ \text{donc}\ \gamma=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{a(a+1)}$$

$$2.3\delta = \varDelta\left(\frac{-1}{a(a+1)}\right) = \frac{2}{a(a+1)(a+2)}, \text{ donc } \delta = \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{a(a+1)(a+2)}.$$

$$2.3.4\varepsilon = \varDelta\,\frac{2}{a(a+1)(a+2)} = \frac{2.3}{a(a+1)(a+2)(a+3)}, \text{ donc } \varepsilon = -\tfrac{1}{4}\cdot\frac{1}{a(a+1)(a+2)(a+3)}$$

En général on aura

$\alpha^{(n)} = \pm\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a(a+1)(a+2)\ldots(a+n-1)}$, où le signe $+$ a lieu lorsque n est impair et le signe — dans le cas contraire.

Pour trouver α on peut faire $x=0$ dans la série supposée, ce qui donne $\alpha = La$. En substituant les valeurs trouvées des coefficiens on obtiendra:

$$L(a+x) = La + \frac{x}{a} - \frac{x(x-1)}{2a(a+1)} + \frac{x(x-1)(x-2)}{3a(a+1)(a+2)} - \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{4a(a+1)(a+2)(a+3)} + \text{etc.} \quad . \ (2)$$

Si dans cette formule on donne à x une valeur entière et positive quelconque, il est évident que la série ne contiendra qu'un nombre limité de termes; connaissant donc $L(a)$, on connaîtra de même $L(a+n)$, où n est un nombre entier positif, en ajoutant à $L(a)$ une fonction entière de a et de n. Faisant p. ex. $x=1$, 2, etc. on aura.

$$L(a+1) = L(a) + \frac{1}{a}$$

$$L(a+2) = L(a) + \frac{2}{a} - \frac{1}{a(a+1)}$$

$$L(a+3) = L(a) + \frac{3}{a} - \frac{3}{a(a+1)} + \frac{2}{a(a+1)(a+2)}.$$

Donc si l'on connaît $L(a)$ pour toutes les valeurs de a depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$, on pourra trouver $L(a)$ pour toute autre valeur de a. La fonction $Lx = \Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$ contenant une constante arbitraire, on pourra pour une valeur donnée de a supposer une valeur quelconque de $L(a)$. Nous ferons donc $L(1) = 0$.

Supposant successivement $a=1, 2, 3$ etc. on en déduira:

$L(2) = L(1) + \frac{1}{1} = 1$, $L(3) = 1 + \frac{1}{2}$, $L(4) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ etc. ou bien

$L(1) = 0{,}0000000000$
$\frac{1}{1} = 1{,}0$
$L(2) = 1.0000000000$
$\frac{1}{2} = 0{,}5$
$L(3) = 1{,}5000000000$
$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333$
$L(4) = 1{,}8333333333$
$\frac{1}{4} = 0{,}25$
$L(5) = 2{,}0833333333$

$L(5) = 2{,}0833333333$
$\frac{1}{5} = 0{,}2$
$L(6) = 2{,}2833333333$
$\frac{1}{6} = 0{,}1666666666$
$L(7) = 2{,}4500000000$
$\frac{1}{7} = 0{,}1428571428$
$L(8) = 2{,}592857142857$
$\frac{1}{8} = 0{,}125$
$L(9) = 2{,}717857142857$
$\frac{1}{9} = 0{,}111111111111$
$L(10) = 2{,}828968253968$

Si dans l'équation (2) on fait $a=0$ et $x=1$, on aura $L(1)=L(0)+\frac{1}{0}$, et à cause de $L(1)=0$, il viendra $L(0)=-\frac{1}{0}=-\infty$. Mettant $-a$ à la place de a, on obtiendra $L(-a)=L(-(a-1))+\frac{1}{a}$. Il suit de cette expression que $L(-n)=-\infty$, pour toute valeur entière et positive de n.

On peut trouver un autre développement de la manière suivante: On a $\varDelta Lx=L(x+1)-Lx=\frac{1}{x}$, et puisque $L(x+1)=Lx+L'x+\frac{1}{2}L''x$
$+\frac{1}{2.3}L'''x+$ etc. il s'ensuit que

$$\frac{1}{x}=L'x+\tfrac{1}{2}L''x+\frac{1}{2.3}L'''x+\text{etc.}$$

De là on pourra sans peine tirer la valeur de $L'x$ en x, et ensuite par intégration celle de Lx. En effet considérons en géneral la fonction $fx=\Sigma\varphi x$. On obtiendra de la même manière l'équation suivante:

$$\varphi x=f'x+\tfrac{1}{2}f''x+\frac{1}{2.3}f'''x+\frac{1}{2.3.4}f''''x+\text{etc.}$$

Supposons qu'on ait:

$$\begin{aligned}
f'x &= \varphi x+\alpha\varphi'x+\beta\varphi''x+\gamma\varphi'''x+\text{etc. on en tirera}\\
\tfrac{1}{2}f''x &= \qquad\tfrac{1}{2}\varphi'x+\tfrac{1}{2}\alpha\varphi''x+\tfrac{1}{2}\beta\varphi'''x+\text{etc.}\\
\frac{1}{2.3}f'''x &= \qquad\qquad\frac{1}{2.3}\varphi''x+\frac{1}{2.3}\alpha\varphi'''x+\text{etc.}\\
\frac{1}{2.3.4}f''''x &= \qquad\qquad\qquad\frac{1}{2.3.4}\varphi'''x+\text{etc.}\\
\text{etc.} & \qquad\qquad\qquad\text{etc.}
\end{aligned}$$

En ajoutant et remarquant que $f'x+\frac{1}{2}f''x+\frac{1}{2.3}f'''x+\ldots=\varphi x$, on obtiendra

$$0=(\alpha+\tfrac{1}{2})\varphi'x+\left(\beta+\tfrac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2.3}\right)\varphi''x+\left(\gamma+\tfrac{1}{2}\beta+\frac{1}{2.3}\alpha+\frac{1}{2.3.4}\right)\varphi'''x+\text{etc.}$$

donc $\alpha+\frac{1}{2}=0$, $\beta+\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2.3}=0$, $\gamma+\frac{1}{2}\beta+\frac{1}{2.3}\alpha+\frac{1}{2.3.4}=0$, etc.
d'où l'on tire, $\alpha=-\frac{1}{2}$, $\beta=\frac{1}{12}$, $\gamma=0$, $\delta=-\frac{1}{720}$, $\varepsilon=0$, etc. donc.

$$f'x=\varphi x-\tfrac{1}{2}\varphi'x+\tfrac{1}{12}\varphi''x-\tfrac{1}{720}\varphi''''x+\text{etc. et en intégrant:}$$

$$\Sigma\varphi x=\int\varphi x dx-\tfrac{1}{2}\varphi x+\tfrac{1}{12}\varphi'x-\tfrac{1}{720}\varphi'''x+\text{etc.}$$

Faisant maintenant $\varphi x=\frac{1}{x}$, on a $\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)=Lx$, $\int\varphi x dx=\log x$

$$\varphi'x=-\frac{1}{x^2},\ \varphi'''x=-\frac{2.3}{x^4}\ \text{etc. et par suite,}$$

$$Lx=c+\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\text{etc.}$$

Pour déterminer la constante c, soit $x=10$, et on aura

$$L(10)=c+\log 10-\tfrac{1}{20}-\tfrac{1}{1200}+\tfrac{1}{1200000}-\text{etc.}$$

d'où l'on tire la valeur de $c=0{,}577215664901\,..$

On obtiendra donc:

$$L(x)=0{,}577215664901\,..+\log x-\frac{1}{2x}-\frac{1}{12x^2}+\frac{1}{120x^4}-\text{etc.}$$

Cette formule est très commode pour calculer la fonction $L(x)$ lorsque x n'est pas trop petit.

Pour calculer $L(x)$ depuis $x=1$ à $x=2$ on peut développer une formule convenable de la manière suivante:

On a $L(1+\omega)=\dfrac{1}{\omega}+\dfrac{1}{\omega-1}+\dfrac{1}{\omega-2}+\cdot\;\cdot+\tfrac{1}{2}+1$

$$=1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}+\ldots \text{à l'inf.}-\frac{1}{1+\omega}-\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{3+\omega}-\ldots \text{à l'inf.}$$

or en développant $\dfrac{1}{1+\omega}$, $\dfrac{1}{2+\omega}$, $\dfrac{1}{3+\omega}$, etc. on trouvera

$$L(1+\omega)=\omega\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots\right)$$
$$-\omega^2\left(1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right)$$
$$+\omega^3\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\ldots\right)$$
$$-\text{etc.}$$

Donc en désignant $1+\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{3^n}+\dfrac{1}{4^n}+\ldots$ par S_n, on aura

$$L(1+\omega)=S_2\omega-S_3\omega^2+S_4\omega^3-S_5\omega^4+S_6\omega^5-\text{etc.}$$

ou bien $L(1+\omega)=(S_2-1)\omega-(S_3-1)\omega^2+(S_4-1)\omega^3-\ldots$

$$+\omega-\omega^2+\omega^3-\ldots$$

or $\omega-\omega^2+\omega^3-\,..=\dfrac{\omega}{\omega+1}$, donc

$$L(1+\omega)=\frac{\omega}{\omega+1}+(S_2-1)\omega-(S_3-1)\omega^2+(S_4-1)\omega^3-\text{etc.} \qquad \text{(A)}$$

Mettant $-\omega$ à la place de ω, il viendra:

$$L(1-\omega)=\frac{\omega}{\omega-1}-(S_2-1)\omega-(S_3-1)\omega^2-(S_4-1)\omega^3-\text{etc.} \qquad \text{(B)}$$

De plus ayant $L(2-\omega)=L(1-\omega)+\dfrac{1}{1-\omega}$, on en tirera

$$L(2-\omega)=1-(S_2-1)\omega-(S_3-1)\omega^2-(S_4-1)\omega^3-\text{etc.} \qquad \text{(C)}$$

On trouvera aussi sans peine la formule suivante:

$$L(1+\omega)=\frac{\omega}{1+\omega}+\frac{\omega}{2(2+\omega)}+\left(S_2-1-\frac{1}{2^2}\right)\omega-\left(S_3-1-\frac{1}{3^2}\right)\omega^2-\left(S_4-1-\frac{1}{4^3}\right)\omega^3-\text{etc.}$$

Je vais maintenant montrer l'application de cette fonction à la sommation des suites. Ayant $S\varphi x = \Sigma\varphi(x+1)$, on pourra sommer toutes les séries dont le terme général est φx, lorsqu'on connait $\Sigma\varphi x$. Considérons d'abord la suite harmonique,

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} + \dots + \frac{a}{b+cx} = S\left(\frac{a}{b+cx}\right) = P.$$

On a donc $P = \Sigma\left(\frac{a}{b+c+cx}\right) = a\,\Sigma\left(\frac{1}{b+c+cx}\right)$. Faisant $b+c+cx=cy$, on a $P = \frac{a}{c}\,\Sigma\left(\frac{1}{y}\right) = C + \frac{a}{c}L(y) = C + \frac{a}{c}L\left(\frac{b+c}{c}+x\right)$. Pour déterminer C soit $x=0$, ce qui donne $P=\frac{a}{b}$, donc $\frac{a}{b} = C + \frac{a}{c}\,L\left(\frac{b+c}{c}\right)$, et par suite:

$$P = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}\left[L\left(\frac{b+c}{c}+x\right) - L\left(\frac{b+c}{c}\right)\right].$$

Faisant p. ex. $a=1$, $b=1$, $c=2$ on aura

$$1+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{7}+\dots+\frac{1}{1+2x} = 1+\tfrac{1}{2}L(x+\tfrac{3}{2})-\tfrac{1}{2}L(\tfrac{3}{2}).$$

Cherchons la somme de la série:

$$\frac{a}{b} - \frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+2c} - \frac{a}{b+3c} + \frac{a}{b+4c} - \dots + \frac{\alpha}{b+2xc} - \frac{a}{b+(2x+1)c} = Q,$$

Cette série étant égale à

$$\frac{a}{b} + \frac{a}{b+2c} + \frac{a}{b+4c} + \dots + \frac{a}{b+2xc} - \left(\frac{a}{b+c} + \frac{a}{b+c+2c} + \frac{a}{b+c+4c} + \dots + \frac{a}{b+c+2xc}\right)$$

on aura tout de suite

$$Q = \frac{a}{b} + \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+2c}{2c}+x\right) - \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+2c}{2c}\right) - \frac{a}{b+c} - \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+3c}{2c}+x\right) + \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+3c}{2c}\right)$$

ou en réduisant

$$Q = \frac{ac}{b(b+c)} + \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+3c}{2c}\right) - \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+2c}{2c}\right) + \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+2c}{2c}+x\right) - \frac{a}{2c}\,L\left(\frac{b+3c}{2c}+x\right).$$

En supposant x infini, on aura $L\left(\frac{b+2c}{2c}+x\right) = L\left(\frac{b+3c}{2c}+x\right)$ et par suite:

$$\frac{1}{b} - \frac{1}{b+c} + \frac{1}{b+2c} - \frac{1}{b+3c} + \frac{1}{b+4c} - \text{etc} = \frac{c}{b(b+c)} + \frac{1}{2c}\left[L\left(\frac{b+3c}{2c}\right) - L\left(\frac{b+2c}{2c}\right)\right]$$

Faisant ici $b=1$ et $c=1$, on obtiendra

$$1-\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}-\text{etc.} = \tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}L(2)-\tfrac{1}{2}L(\tfrac{3}{2})$$

or $L(2)=1$ et $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\dots=\log 2$, donc on en tire ce résultat remarquable

$$\log 2 = 1-\tfrac{1}{2}L(\tfrac{3}{2}),\ \text{ou}\ L(\tfrac{3}{2}) = 2-2\log 2.$$

Si l'on fait $b=1$ et $c=2$, on aura

$$1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\dots = \tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}L(\tfrac{7}{4})-\tfrac{1}{4}L(\tfrac{5}{4})$$

$$\text{or } 1-\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{7}+\text{etc.}=\frac{\pi}{4},\ \text{on a donc}$$

$$\frac{\pi}{4}=\tfrac{2}{3}+\tfrac{1}{4}L(\tfrac{7}{4})-\tfrac{1}{4}L(\tfrac{5}{4}).$$

$$\pi=\tfrac{8}{3}+L(\tfrac{7}{4})-L(\tfrac{5}{4}).$$

On sait que $\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi-\pi}-\frac{1}{\varphi+\pi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}+\frac{1}{\varphi+2\pi}-\frac{1}{\varphi-3\pi}-\text{etc.}$

$$=\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi-\pi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}-\frac{1}{\varphi-3\pi}+\text{etc.}-\left(\frac{1}{\varphi+\pi}-\frac{1}{\varphi+\pi+\pi}+\frac{1}{\varphi+\pi+2\pi}-\text{etc.}\right)$$

or faisant $b=\varphi$ et $c=-\pi$, on obtiendra

$$\frac{1}{\varphi}-\frac{1}{\varphi-\pi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}-\text{etc}=\frac{\pi}{\varphi(\pi-\varphi)}+\frac{1}{2\pi}\left[L\left(\frac{2\pi-\varphi}{2\pi}\right)-L\left(\frac{3\pi-\varphi}{2\pi}\right)\right]$$

et en faisant $b=\varphi+\pi$ et $c=\pi$

$$\frac{1}{\varphi+\pi}-\frac{1}{\varphi+\pi+\pi}+\frac{1}{\varphi+\pi+2\pi}-\text{etc}=\frac{\pi}{(\varphi+\pi)(\varphi+2\pi)}+\frac{1}{2\pi}\left[L\left(\frac{4\pi+\varphi}{2\pi}\right)-L\left(\frac{3\pi+\varphi}{2\pi}\right)\right]\ \text{donc}$$

$$\frac{1}{\sin\varphi}=\frac{\pi}{\varphi(\pi-\varphi)}-\frac{\pi}{(\varphi+\pi)(\varphi+2\pi)}+\frac{1}{2\pi}\left[L\left(\frac{2\pi-\varphi}{2\pi}\right)+L\left(\frac{3\pi+\varphi}{2\pi}\right)-L\left(\frac{3\pi-\varphi}{2\pi}\right)-L\left(\frac{4\pi+\varphi}{2\pi}\right)\right]$$

Soit $\varphi=m\pi$, et l'on obtiendra:

$$\frac{\pi}{\sin m\pi}=\frac{1}{m(1-m)}-\frac{1}{(m+1)(m+2)}+\tfrac{1}{2}\left[L\left(1-\frac{m}{2}\right)-L\left(2+\frac{m}{2}\right)+L\left(\tfrac{3}{2}+\frac{m}{2}\right)-L\left(\tfrac{3}{2}-\frac{m}{2}\right)\right]$$

on tire de là en posant $\frac{m}{2}=x$ et remarquant que $L(1+x)=L(x)+\frac{1}{x}$

$$L(1-x)-L(x)+L(\tfrac{1}{2}+x)-L(\tfrac{1}{2}-x)=\frac{2\pi}{\sin 2x\pi};$$

mettant $\frac{1}{4}+y$ au lieu de x, on aura

$$L(\tfrac{3}{4}+y)+L(\tfrac{3}{4}-y)-L(\tfrac{1}{4}+y)-L(\tfrac{1}{4}-y)=\frac{2\pi}{\cos 2y\pi}.$$

On a

$$\text{cotang } \varphi=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\varphi+\pi}+\frac{1}{\varphi+2\pi}+\frac{1}{\varphi+3\pi}+\text{etc.}+\frac{1}{\varphi-\pi}+\frac{1}{\varphi-2\pi}+\frac{1}{\varphi-3\pi}+\text{etc.}$$

donc faisant successivement $b=\varphi$, $c=\pi$ et $b=\varphi$, $c=-\pi$, et remarquant que $L\left(\frac{\varphi+\pi}{\pi}+x\right)-L\left(\frac{\varphi-\pi}{\pi}+x\right)=0$ pour $x=\infty$, on aura

$$\cot\ \varphi=\frac{1}{\varphi}+\frac{1}{\pi}\left[L\left(\frac{\pi-\varphi}{\pi}\right)-L\left(\frac{\pi+\varphi}{\pi}\right)\right].$$

Si l'on fait $\varphi=\pi x$, on obtiendra

$$\cot\pi x=\frac{1}{\pi}\left(L(1-x)-L(1+x)\right)+\frac{1}{\pi x};$$

donc

$$L(1-x)-L(1+x)=\pi\cot\pi x-\frac{1}{x},$$

et à cause de $L(1+x)=L(x)+\frac{1}{x}$,

$$L(1-x)-L(x)=\pi.\cot\pi x.$$

Substituant cette valeur dans l'équation ci-dessus

$$L(1-x)-L(x)+L(\tfrac{1}{2}+x)-L(\tfrac{1}{2}-x)=\frac{2\pi}{\sin 2x\pi}, \text{ il viendra}$$

$$L(\tfrac{1}{2}+x)-L(\tfrac{1}{2}-x)=\frac{2\pi}{\sin 2x\pi}-\pi\cot x\pi,$$

d'où en réduisant

$$L(\tfrac{1}{2}+x)-L(\tfrac{1}{2}-x)=\pi \text{ tang. } \pi x.$$

A l'aide de cette formule on peut, lorsque les valeurs de $L(x)$ sont connues depuis $x=1$ jusqu'à $x=1,5$, trouver les valeurs de $L(x)$ pour toute autre valeur de x.

Pour faire usage des formules (A), (B), (C) il faut connaître les valeurs de S_2, S_3 etc. Celles-ci se trouvent calculées dans Euleri Calc. Diff. page 456. En substituant ces valeurs on aura.

$$L(1\pm\omega)=\frac{\pm\omega}{1\pm\omega}\pm\alpha\omega-\alpha_1\omega^2\pm\alpha_2\omega^3-\alpha_3\omega^4+\ldots$$

$$L(2\pm\omega)=1\pm\alpha\omega-\alpha_1\omega^2\pm\alpha_2\omega^3-\alpha_3\omega^4\pm\ldots$$

où α, α_1, α_2, α_3, etc. ont les valeurs suivantes:

α = 0,64493 40668 48226 4	α_8 = 0,00099 45751 27818 0
α_1 = 0,20205 69031 59594 2	α_9 = 0,00049 41886 04109 4
α_2 = 0,08232 32337 11138 1	α_{10} = 0,00024 60865 53308 0
α_3 = 0,03692 77551 06863 2	α_{11} = 0,00012 27233 47585 7
α_4 = 0,01734 30619 84449 1	α_{12} = 0,00006 12481 35058 7
α_5 = 0,00834 92773 86601 8	α_{13} = 0,00003 05882 36307 0
α_6 = 0,00407 73561 97944 3	α_{14} = 0,00001 52822 59408 6
α_7 = 0,00200 83928 26082 2	

Calculons p. ex. $L(2\pm\omega)$ et $L(1\pm\omega)$ pour $\omega=0,01$

$\alpha.\omega$ = 0,006449340668	$\alpha_1.\omega^2$ = 0,000020205690
$\alpha_2.\omega^3$ = 0,000000082323	$\alpha_3.\omega^4$ = 0,000000000369
$\alpha_4.\omega^5$ = 0,000000000002	— 0,000020206059
0,006449422993	+ 0,006449422993
+ 0,000020206059	0,006429216934
— 0,006469629052	1
1,	1,006429216934 = $L(2{,}01)$
$L(1{,}99)$ = 0,993530370948	0,990099009900 = $\frac{100}{101}$
$\frac{100}{99}$ = 1,010101010101	0,016330207034 = $L(1{,}01)$
$L(0{,}99)$ = — 0,016570639153	

Si l'on devait construire une table sur les valeurs de la fonction $L(x)$ p. ex. de millième à millième, on poserait successivement $\omega=0{,}001$, $\omega=0{,}002$, $\omega=0{,}003$ etc. dans les formules ci-dessus; mais il serait moins laborieux de déduire ces valeurs l'une de l'autre. Pour cet effet mettons $\omega+0{,}001$ à la place de ω, et nous aurons l'expression suivante:

$$\begin{aligned} L(2-(\omega+0{,}001)) = L(2-\omega) &- (\alpha\,.\,0{,}001+\alpha_1.0{,}000001+\alpha_2.0{,}000000001+\ldots)\\ &- \omega\,(\alpha_1.0{,}002+\alpha_2.0{,}000003+\alpha_3.0{,}000000004+\ldots)\\ &- \omega^2(\alpha_2.0{,}003+\alpha_3.0{,}000006+\alpha_4.0{,}000000010+\ldots)\\ &- \omega^3(\alpha_3.0{,}004+\alpha_4.0{,}000010+\alpha_5.0{,}000000020+\ldots) \end{aligned}$$

Substituant les valeurs de α, α_1, α_2 etc. on en peut tirer la valeur de $L(2-(\omega+0{,}001))-L(2-\omega)=\varDelta L(2-\omega)$. De la même manière on pourra développer $\varDelta^2L(2-\omega)$, $\varDelta^3L(2-\omega)$ etc. et à l'aide de ces différences il sera facile de construire une table sur les valeurs de la fonction $L(x)$. Dans ce calcul il faut avoir soin de donner à ω des valeurs assez petites, ce qui est bien à remarquer. Je vais faire voir une application importante d'une telle table. Cette application consiste en ce qu'on pourra par son moyen, très facilement construire une table sur la fonction

$$\log 1+\log 2+\log 3+\ldots+\log(x-1)=\log(1.2.3\ldots(x-1))=\log\Gamma x.$$

En effet on a $L(x)=\Sigma\left(\frac{1}{x}\right)$, donc $\int Lxdx=\int Cdx+\Sigma\int\frac{dx}{x}=Cx+\Sigma\log x$ $=Cx+\log\Gamma x$; donc $\log\Gamma x=\int L(x)dx-Cx$, et de là $\left(\frac{d\log\Gamma x}{dx}\right)=L(x)-C$ Soit pour abréger $\log\Gamma x=P$, d'où $\frac{dP}{dx}=L(x)-C$; or d'aprés un théorème connu on a

$$\frac{dP}{dx}=\frac{1}{\Delta x}(\varDelta P-\tfrac{1}{2}\varDelta^2P+\tfrac{1}{3}\varDelta^3P-\tfrac{1}{4}\varDelta^4P+\tfrac{1}{5}\varDelta^5P-\text{etc.})=L(x)-C.$$

Cette expression donne $L(x)$ en P ou $\log\Gamma x$; on peut en tirer la valeur de $\varDelta P$ exprimée en $L(x)$. Or on voit aisément qu'on peut poser

$\frac{\Delta P}{\Delta x}=L(x)-C+a.\varDelta Lx+a'.\varDelta^2Lx+a''.\varDelta^3Lx+a'''.\varDelta^4Lx+$ etc. d'où l'on tire

$$\begin{aligned} -\tfrac{1}{2}\frac{\Delta^2P}{\Delta x} &= -\tfrac{1}{2}\varDelta Lx-\tfrac{1}{2}a.\varDelta^2Lx-\tfrac{1}{2}a'\varDelta^3Lx-\tfrac{1}{2}a''\varDelta^4Lx-\text{etc.}\\ +\tfrac{1}{3}\frac{\Delta^3P}{\Delta x} &= +\tfrac{1}{3}\varDelta^2Lx+\tfrac{1}{3}a\varDelta^3Lx+\tfrac{1}{3}a'\varDelta^4Lx+\text{etc.}\\ -\tfrac{1}{4}\frac{\Delta^4P}{\Delta x} &= -\tfrac{1}{4}\varDelta^3Lx-\tfrac{1}{4}a\varDelta^4Lx-\text{etc.}\\ +\tfrac{1}{5}\frac{\Delta^5P}{\Delta x} &= +\tfrac{1}{5}\varDelta^4Lx+\text{etc.}\\ \text{etc.}\qquad & \qquad\qquad\text{etc.} \end{aligned}$$

La somme des premiers membres de ces équations étant égale à $Lx - C$, on en tire, $a = \frac{1}{2}$, $a' = \frac{1}{2}a - \frac{1}{3}$, $a'' = \frac{1}{2}a' - \frac{1}{3}a + \frac{1}{4}$, $a''' = \frac{1}{2}a'' - \frac{1}{3}a' + \frac{1}{4}a - \frac{1}{5}$ etc. d'où on déduit, $a = \frac{1}{2}$, $a' = -\frac{1}{12}$, $a'' = \frac{1}{24}$, $a''' = -\frac{19}{720}$. Substituant ces valeurs on obtiendra:

$$\Delta P = \Delta(\log \Gamma x) = (Lx - C)\,\Delta x + \tfrac{1}{2}\Delta Lx\,.\,\Delta x - \tfrac{1}{12}\Delta^2 Lx\,.\,\Delta x + \tfrac{1}{24}\Delta^3 Lx\,.\,\Delta x - \tfrac{19}{720}\Delta^4 Lx\,.\,\Delta x + \text{etc.}$$

Pour déterminer la constante C, soit $x = 1$ et $\Delta x = 1$, et l'on aura $\Delta(\log \Gamma x) = \log \Gamma 2 - \log \Gamma 1 = 0$, de plus $L(x) = L(1) = 0$, $\Delta Lx = 1$, $\Delta^2 Lx = -\frac{1}{2}$, $\Delta^3 Lx = \frac{1}{3} \ldots \Delta^n Lx = \frac{(-1)^{n-1}}{n}$; donc

$$C = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{24} + \tfrac{1}{72} + \ldots = 0{,}577215664901$$

et conséquemment.

$$\log \Gamma(x + \Delta x) = \log \Gamma x - \Delta x(0{,}5772156\ldots - Lx - \tfrac{1}{2}\Delta Lx + \tfrac{1}{12}\Delta^2 Lx - \tfrac{1}{24}\Delta^3 Lx + \ldots)$$

Si l'on pose $\Delta x = 0{,}001$, on aura

$$\log \Gamma(x + 0{,}001) = \log \Gamma x - 0{,}0005772156\ldots + \tfrac{1}{1000}(Lx + \tfrac{1}{2}\Delta Lx - \tfrac{1}{12}\Delta^2 Lx + \ldots)$$

Mettant $2 - \omega$ au lieu de x, on aura

$$\log \Gamma(2 - \omega - 0{,}001) = \log \Gamma(2 - \omega) + 0{,}0005772156\ldots - \tfrac{1}{1000}(L(2 - \omega) + \tfrac{1}{2}\Delta L(2 - \omega) + \text{etc.})$$

La fonction $L(x)$ peut aussi s'exprimer par une intégrale définie. Si dans la formule (2) on pose $a = 1$, et ensuite $x = a$, on aura:

$$L(1 + a) = a - \tfrac{1}{2}\,\frac{a(a-1)}{2} + \tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a(a-1)(a-2)}{2\,.\,3} - \tfrac{1}{4}\,.\,\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{2\,.\,3\,.\,4} + \text{etc.}$$

Considérons le développement de $(1 - x)^a$.

On a $(1 - x)^a = 1 - ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 - \frac{a(a-1)(a-2)}{2\,.\,3}x^3 + \text{etc.}$

on tire de là

$$\frac{1 - (1 - x)^a}{x} = a - \frac{a(a-1)}{2}x + \frac{a(a-1)(a-2)}{2\,.\,3}x^2 - \text{etc.}$$

multipliant par dx et intégrant, il vient

$$\log x - \int \frac{(1-x)^a}{x}\,.\,dx = C + ax - \tfrac{1}{2}\,.\,\frac{a(a-1)}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}\,.\,\frac{a(a-1)(a-2)}{2\,.\,3}x^3 - \text{etc.} = \int \frac{1-(1-x)^a}{x}\,dx.$$

Prenant l'intégrale depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ on aura

$$a - \tfrac{1}{2}\frac{a(a-1)}{2} + \tfrac{1}{3}\frac{a(a-1)(a-2)}{2\,.\,3} - \tfrac{1}{4}\frac{a(a-1)(a-2)(a-3)}{2\,.\,3\,.\,4} + \ldots = \int_0^1 \left(\frac{1-(1-x)^a}{x}\right) dx.$$

Or cette série est, en vertu de ce qui précède, égale à $L(1 + a)$, on a donc

$$L(1 + a) = \int_0^1 \left(\frac{1 - (1 - x)^a}{x}\right) dx.$$

Mettant $1 - x$ au lieu de x il vient

$$L(1 + a) = \int_0^1 \frac{x^a - 1}{x - 1}\,dx.$$

Mettant de plus $x^{a'}$ au lieu de x, on aura

$$L(1+a)=a'\int_0^1 \frac{x^{aa'}-1}{x^{a'}-1}\, x^{a'-1}dx, \text{ où l'on suppose } a'>0.$$

Posant $aa'=m$, il vient

$$L\left(1+\frac{m}{a'}\right)=a'\int_0^1 \frac{x^m-1}{x^{a'}-1}\, x^{a'-1}dx$$

Cette expression conduit à ce théorème remarquable.

Théorème. "Lorsque y est une quantité rationnelle quelconque, la fonc-"tion $L(y)$ peut toujours s'exprimer par des fonctions algébriques, logarithmi-"ques et circulaires."

En effet ayant

$$L\left(1+\frac{m}{a}\right)=a\int_0^1 \frac{x^m-1}{x^a-1}.x^{a-1}dx, \text{ lorsque } a>0,$$

$$\text{et } L\left(1+\frac{m}{a}\right)=a\int_1^\infty \frac{x^m-1}{x^a-1}.x^{a-1}dx \text{ lorsque } a<0$$

il est clair que l'intégrale $\int \frac{x^m-1}{x^a-1}\, x^{a-1}dx$, pour des valeurs entières de m et de a, est intégrable par des fonctions algébriques, logarithmiques et circulaires. Or $1+\frac{m}{a}$ peut, pour des valeurs entières de m et de a signifier une quantité rationnelle quelconque; donc le théorème énoncé est démontré.

Soit $m=1$ et $a=2$; on aura $L(1+\frac{1}{2})=2\int_0^1 \frac{xdx}{1+x}=2-2\log 2$, ce que nous avons trouvé plus haut par un procédé différent.

Soit $m=1$ et $a=3$; on aura $L(1+\frac{1}{3})=3\int_0^1 \frac{x^2dx}{1+x+x^2}=3-3\int_0^1 \frac{(1+x)dx}{1+x+x^2}$ d'où l'on tire $L(1+\frac{1}{3})=3-\frac{3}{2}\log 3-\frac{\pi\sqrt{(3)}}{6}$.

Revenons à l'expression générale $L\left(1+\frac{m}{a}\right)=a\int_0^1 \frac{x^m-1}{x^a-1}.x^{a-1}dx$. Or l'intégrale $\int \frac{x^m-1}{x^a-1}.x^{a-1}dx$ se divise en deux parties, savoir,

$$\int \frac{x^{m+a-1}dx}{x^a-1}-\int \frac{x^{a-1}dx}{x^a-1}=\int \frac{x^{m+a-1}dx}{x^a-1}-\frac{1}{a}\log(x^a-1).$$

Il reste donc à trouver l'integrale $\int \frac{x^{m+a-1}}{x^a-1}.dx$.

On a $\frac{x^{m+a-1}}{x^a-1}=x^{m-1}+\frac{x^{m-1}}{x^a-1}$; et par conséquent

$$\int \frac{x^{m+a-1}}{x^a-1}.dx=\frac{x^m}{m}+\int \frac{x^{m-1}dx}{x^a-1}.$$

Or on peut supposer $m < a$, car le problème peut toujours être ramené à ce cas. On aura donc lorsque a est un nombre impair, (voyez Euleri Calc. integr. pag. 49, 50).

$$\int \frac{x^{m-1}}{x^a-1}dx = \frac{1}{a}\log(x-1) + \frac{2}{a}\sum_1^{\frac{1}{2}(a-1)}{}_k \cos\frac{2km\pi}{a}\log\sqrt{\left(1-2x\cos\frac{2k\pi}{a}+x^2\right)}$$
$$-\frac{2}{a}\sum_1^{\frac{1}{2}(a-1)}{}_k \sin\frac{2km\pi}{a}.\,\text{arc tang}\left\{\frac{x.\sin\frac{2k\pi}{a}}{1-x.\cos\frac{2k\pi}{a}}\right\}.$$

Si l'on pose cette expression égale à $\frac{1}{a}\log(x-1)+P$, on aura

$\int \frac{x^m-1}{x^a-1}.x^{a-1}dx = P - \frac{1}{a}\log\frac{x^a-1}{x-1}$, et en intégrant entre les limites $x=0$ et $x=1$,

$$\int_0^1 \frac{x^m-1}{x^a-1}.x^{a-1}dx = P'' - P' - \frac{1}{a}\log a.$$

On voit aisément que $P'=0$, et qu'on ait

$$P'' = \frac{1}{a}\sum_1^{\frac{1}{2}(a-1)}{}_k \cos\frac{2km\pi}{a}\log\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{a}\right) - \frac{2}{a}\sum_1^{\frac{1}{2}(a-1)}{}_k \sin\frac{2km\pi}{a}.\text{arc tg}\left\{\frac{\sin\frac{2k\pi}{a}}{1-\cos\frac{2k\pi}{a}}\right\}$$

Il s'ensuit donc, lorsque a est impair

$$L\left(1+\frac{m}{a}\right) = \frac{a}{m} - \log a + \sum_1^{\frac{1}{2}(a-1)}{}_k \cos\frac{2km\pi}{a}\log\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{a}\right)$$
$$-2\sum_1^{\frac{1}{2}(a-1)}{}_k \sin\frac{2km\pi}{a}.\,\text{arc tang}\left\{\frac{\sin\frac{2k\pi}{a}}{1-\cos\frac{2k\pi}{a}}\right\} \quad \text{(D)}$$

$a=1$ donne $L(2)=1$; $a=3$ et $m=1$ donne

$$L(1+\tfrac{1}{3}) = 3 - \log 3 + \cos\frac{2\pi}{3}.\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{3}\right) - 2\sin\frac{2\pi}{3}.\text{arc tg}\left\{\frac{\sin\frac{2\pi}{3}}{1-\cos\frac{2\pi}{3}}\right\}$$

or $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{(3)}}{2}$, donc $L(1+\frac{1}{3}) = 3 - \frac{3}{2}\log 3 - \frac{\pi}{6}\sqrt{(3)}$

$a=3$ et $m=2$ donne $L(1+\frac{2}{3}) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\log 3 + \frac{\pi}{6}\sqrt{(3)}$.

La formule (D) a seulement lieu, lorsque a est impair.

Lorsque a est pair, on aura:

$$L\left(1+\frac{m}{a}\right) = \frac{a}{m} - \log a \pm \log 2 + \sum_1^{\frac{1}{2}(a-2)}{}_k \cos\frac{2km\pi}{a}.\log\left(2-2\cos\frac{2k\pi}{a}\right)$$
$$-2\sum_1^{\frac{1}{2}(a-2)}{}_k \sin\frac{2km\pi}{a}\,\text{arc tang}\left\{\frac{\sin\frac{2k\pi}{a}}{1-\cos\frac{2k\pi}{a}}\right\} \quad \text{(E)}$$

Le terme $\pm \log 2$ doit être pris avec le signe $+$ si m est pair; et avec le signe — dans le cas contraire.

$a=2$ et $m=1$ donne $L(1+\frac{1}{2})=2-\log 2$.

$a=4$ et $m=1$ donne $L(1+\frac{1}{4})=4-3\log 2-\frac{\pi}{2}$

$a=4$ et $m=3$ donne $L(1+\frac{3}{4})=\frac{4}{3}-3\log 2+\frac{\pi}{2}$.

Les deux dernières équations donnent $L(\frac{7}{4})-L(\frac{5}{4})=\pi-\frac{8}{3}$, ce que nous avons déjà trouvé plus haut.

La formule (E) comprend aussi le cas de a impair, car

$L\left(1+\frac{m'}{2a'+1}\right)=L\ 1+\left(\frac{2m'}{2(2a'+1)}\right)$. Mettant donc $2a$ au lieu de a on aura

$$L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=\frac{2a}{m}-\log a-(\log 2\pm\log 2)+\sum_1^{a-1}{}_k\cos\frac{km\pi}{a}.\log\left(2\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2$$
$$-2\sum_1^{a-1}{}_k\sin\frac{km\pi}{a}.\text{arc tang}\ \frac{\sin\frac{k\pi}{a}}{2\left(\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2}$$

en remarquant que $1-\cos z=2\left(\sin\frac{z}{2}\right)^2$.

Si l'on met ici $2a-m$ à la place de m, il vient:

$$L\left(1+\frac{2a-m}{2a}\right)=L\left(2-\frac{m}{2a}\right)=\frac{2a}{2a-m}-\log a-(\log 2\pm\log 2)+\sum_1^{a-1}{}_k\cos\frac{km\pi}{a}.\log\left(2\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2$$
$$+2\sum_1^{a-1}{}_k\sin\frac{km\pi}{a}.\text{arc tang}\ \frac{\sin\frac{k\pi}{a}}{2\left(\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2}$$

en remarquant que $\cos\frac{k(2a-m)\pi}{a}=\cos\frac{km\pi}{a}$, et que $\sin\frac{k(2a-m)\pi}{a}=-\sin\frac{km\pi}{a}$

Ajoutant ces expressions de $L\left(2-\frac{m}{2a}\right)$ et $L\left(1+\frac{m}{2a}\right)$, on obtient:

$$L\left(2-\frac{m}{2a}\right)+L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=\frac{2a}{2m-a}+\frac{2a}{m}-2\log a-2(\log 2\pm\log 2)$$
$$+4\sum_1^{a-1}{}_k\cos\frac{km\pi}{a}\log\left(2\sin\frac{k\pi}{2a}\right)$$

et en retranchant l'une de l'autre, on obtient

$$L\left(2-\frac{m}{2a}\right)-L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=\frac{2a}{2a-m}-\frac{2a}{m}+4\sum_1^{a-1}{}_k\sin\frac{km\pi}{a}.\text{arc tang}\ \frac{\sin\frac{k\pi}{a}}{2\left(\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2}$$

Or $L\left(2-\frac{m}{2a}\right)=L\left(1+1-\frac{m}{2a}\right)=L\left(1-\frac{m}{2a}\right)+\frac{2a}{2a-m}$, donc

$$L\left(1-\frac{m}{2a}\right)-L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=-\frac{2a}{m}+4\sum_{1}^{a-1}{}_k\sin\frac{km\pi}{a}.\text{arc tang}\frac{\sin\frac{k\pi}{a}}{2\left(\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2}$$

mais nous avons vu auparavant que $L\left(1-\frac{m}{2a}\right)-L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=\pi.\cot\frac{m\pi}{2a}-\frac{2a}{m}$; on a par conséquent

$$\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{2a}=2\sum_{1}^{a-1}{}_k\sin\frac{km\pi}{a}.\text{arc tang}\frac{\sin\frac{k\pi}{a}}{2\left(\sin\frac{k\pi}{2a}\right)^2}.$$

En substituant cette valeur dans l'expression trouvée ci-dessus pour $L\left(1+\frac{m}{2a}\right)$, on aura

$$L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=\frac{2a}{m}-\log a-(\log 2\pm\log 2)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{2a}+2\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{km\pi}{a}.\log\left(2\sin\frac{k\pi}{2a}\right),$$

et puisque $L\left(1+\frac{m}{2a}\right)=L\left(\frac{m}{2a}\right)+\frac{2a}{m}$, on a aussi,

$$L\left(\frac{m}{2a}\right)=-\log a-(\log 2\pm\log 2)-\frac{\pi}{2}\cot\frac{m\pi}{2a}+2\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{km\pi}{a}.\log\left(2\sin\frac{k\pi}{2a}\right)$$

En faisant ici successivement $m=2, 4, 6, 8\ldots 2(a-1)$ et ajoutant, on obtiendra:

$$L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\ldots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)=-(a-1)\log a$$
$$-\frac{\pi}{2}\left(\cot\frac{\pi}{a}+\cot\frac{2\pi}{a}+\cot\frac{3\pi}{a}+\ldots+\cot\frac{(a-1)\pi}{a}\right)$$
$$+2\log\left(2\sin\frac{\pi}{2a}\right)\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{2k\pi}{a}+2\log\left(2\sin\frac{2\pi}{2a}\right)\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{4k\pi}{a}+2\log\left(2\sin\frac{3\pi}{2a}\right)\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{6k\pi}{a}$$
$$+\ldots+2\log\left(2\sin\frac{(a-1)\pi}{2a}\right)\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{2(a-1)k\pi}{a}.$$

Or $\cot\frac{\pi}{a}+\cot\frac{2\pi}{a}+\ldots+\cot\frac{(a-1)\pi}{a}=0$, et $\sum_{1}^{a-1}{}_k\cos\frac{2nk\pi}{a}=-1$, donc

$$L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\ldots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)=-(a-1)\log a-2\log\left(2\sin\frac{\pi}{2a}\right)$$
$$-2\log\left(2\sin\frac{2\pi}{2a}\right)-2\log\left(2\sin\frac{3\pi}{2a}\right)\ldots-2\log\left(2\sin\frac{(a-1)\pi}{2a}\right)$$

donc

$$L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\ldots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

$$=-(a-1)\log a-2(a-1)\log 2-2\log\left(\sin\frac{\pi}{2a}\cdot\sin\frac{2\pi}{2a}\ldots\sin\frac{(a-1)\pi}{2a}\right).$$

mais $\left(\sin\frac{\pi}{2a}.\sin\frac{2\pi}{2a}\ \ldots\sin\frac{(a-1)\pi}{2a}\right)^2=\frac{a}{2^{2a-2}}$, et on aura par suite

$$L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\ldots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)=a\log\left(\frac{1}{a}\right),$$ d'où l'on tire

$$\log a=-\frac{1}{a}\left[L\left(\frac{1}{a}\right)+L\left(\frac{2}{a}\right)+L\left(\frac{3}{a}\right)+\ldots+L\left(\frac{a-1}{a}\right)\right],$$ et de là

$$a^a=\frac{1}{e^{L\left(\frac{1}{a}\right)}e^{L\left(\frac{2}{a}\right)}e^{L\left(\frac{3}{a}\right)}\ldots e^{L\left(\frac{a-1}{a}\right)}}.$$

On peut encore trouver d'autres propriétés de la fonction $L(x)$ comme il suit. On a

$$L(x)=C-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x+3}+\ldots\right)$$

mettant $2x$ au lieu de x, il vient

$$L(2x)=C-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots\right)-\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\ldots\right)$$

or $L(x)=C-\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x+1}+\frac{1}{x+2}+\ldots\right)$ et $L(x+\frac{1}{2})=C-\left(\frac{1}{x+\frac{1}{2}}+\frac{1}{x+\frac{3}{2}}+\ldots\right)$, donc

$$L(2x)=C'+\tfrac{1}{2}L(x)+\tfrac{1}{2}L(x+\tfrac{1}{2}).$$

Pour déterminer C' on fera $x=1$, et on aura $0=C'+\frac{1}{2}L(\frac{1}{2})$ or $L(\frac{1}{2})=-2\log 2$, donc $C'=\log 2$ et

$$2L(2x)=2\log 2+L(x)+L(x+\tfrac{1}{2})\ \ldots\ (\text{F})$$

ou, en remarquant que $L(1+2x)=L(2x)+\frac{1}{2x}$ et que $L(1+x)=L(x)+\frac{1}{x}$,

$$2L(1+2x)=2\log 2+L(1+x)+L(\tfrac{1}{2}+x)$$

de plus, ayant $L(\frac{1}{2}+x)=L(\frac{3}{2}+x)-\frac{2}{1+2x}$, on aura

$$L(\tfrac{3}{2}+x)=2L(1+2x)-L(1+x)+\frac{2}{1+2x}-2\log 2.$$

Mettant $1-x$ à la place de x dans l'équation (F) on obtiendra $2L(2-2x)=2\log 2+L(1-x)+L(\frac{3}{2}-x)$, et à cause de $L(1-x)=L(2-x)-\frac{1}{1-x}$,

$$L(\tfrac{3}{2}-x)=2L(2-2x)-L(2-x)+\frac{1}{1-x}-2\log 2.$$

Cette formule facilite beaucoup le calcul de la fonction $L(x)$. Si par

exemple on devait calculer la valeur de $L(1{,}498)$, on ferait $1{,}498 = \frac{3}{2} - x$, et par suite $x = 0{,}002$, $2 - 2x = 1{,}996$ $2 - x = 1{,}998$.

Revenons à la formule: $L(x) = C - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} + \dots\right)$

Si l'on met nx au lieu de x, on aura:

$$L(nx) = C - \left(\frac{1}{nx} + \frac{1}{1+nx} + \frac{1}{2+nx} + \dots + \frac{1}{n-1+nx}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{n+nx} + \frac{1}{n+1+nx} + \frac{1}{n+2+nx} + \dots + \frac{1}{2n-1+nx}\right)$$
$$- \left(\frac{1}{2n+nx} + \frac{1}{2n+1+nx} + \frac{1}{2n+2+nx} + \dots + \frac{1}{3n-1+nx}\right)$$
$$- \text{etc.}$$

ou bien

$$L(nx) = C - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{2+x} + \dots\right)$$
$$- \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+x+\frac{1}{n}} + \frac{1}{2+x+\frac{1}{n}} + \dots\right\}$$
$$- \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x+\frac{2}{n}} + \frac{1}{1+x+\frac{2}{n}} + \frac{1}{2+x+\frac{2}{n}} + \dots\right\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$- \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x+\frac{r}{n}} + \frac{1}{1+x+\frac{r}{n}} + \frac{1}{2+x+\frac{r}{n}} + \dots\right\}$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$- \frac{1}{n}\left\{\frac{1}{x+\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{1+x+\frac{n-1}{n}} + \frac{1}{2+x+\frac{n-1}{n}} + \dots\right\}$$

Or on a en général

$$\frac{1}{x+\frac{r}{n}} + \frac{1}{1+x+\frac{r}{n}} + \frac{1}{2+x+\frac{r}{n}} + \dots = C' - L\left(x + \frac{r}{n}\right), \text{ donc}$$

$$L(nx) = C'' + \frac{1}{n}\left[L(x) + L\left(x + \frac{1}{n}\right) + L\left(x + \frac{2}{n}\right) + \dots + L\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right]$$

Pour déterminer C'' faisons $x = 0$; il en résulte, à cause de $L(n.0) = \frac{1}{n}\ L(0)$,

$$0 = C'' + \frac{1}{n} \cdot \left[L\left(\frac{1}{n}\right) + L\left(\frac{2}{n}\right) + L\left(\frac{3}{n}\right) + \dots L\left(\frac{n-1}{n}\right)\right],$$

or nous avons vu que $\frac{1}{n}\left[L\left(\frac{1}{n}\right) + L\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + L\left(\frac{n-1}{n}\right)\right] = -\log n$,

donc

$$L(nx) = \log n + \frac{1}{n} \cdot \left[L(x) + L\left(x + \frac{1}{n}\right) + L\left(x + \frac{2}{n}\right) + \ldots + L\left(x + \frac{n-1}{n}\right)\right].$$

Posant donc successivement $n = 1, 2, 3, 4$ etc. on aura

$$L(1x) = \log 1 + \tfrac{1}{1} L(x)$$
$$L(2x) = \log 2 + \tfrac{1}{2}\left(L(x) + L(x + \tfrac{1}{2})\right)$$
$$L(3x) = \log 3 + \tfrac{1}{3}\left(L(x) + L(x + \tfrac{1}{3}) + L(x + \tfrac{2}{3})\right)$$

etc.

IV.

Les fonctions transcendantes $\Sigma\frac{1}{a^2}$, $\Sigma\frac{1}{a^3}$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$, $\ldots\Sigma\frac{1}{a^n}$ *exprimées par des intégrales définies.*

Si l'on différentie successivement la fonction $\Sigma\frac{1}{a}$, on aura

$$\frac{d\left(\Sigma\frac{1}{a}\right)}{da}=\frac{\Sigma\left(d\frac{1}{a}\right)}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2}$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\frac{\Sigma d^2\left(\frac{1}{a}\right)}{da^2}=+2\Sigma\frac{1}{a^3}$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\frac{\Sigma d^3\left(\frac{1}{a}\right)}{da^3}=-2.3\Sigma\frac{1}{a^4}$$

etc.

$$\frac{d^n\Sigma\frac{1}{a}}{da^n}=\frac{\Sigma d^n\left(\frac{1}{a}\right)}{da^n}=\pm 2.3.4\ldots n.\Sigma\frac{1}{a^{n+1}}$$

où le signe $+$ a lieu, lorsque n est pair, et le signe $-$ lorsque n est impair.

On en conclut réciproquement

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{\mathrm{da}},\quad \Sigma\frac{1}{a^3}=+\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{2.da^2},\quad \Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{2.3da^3}+\text{etc.}$$

$$\Sigma\frac{1}{a^n}=\pm\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{1.2.3..(n-1)da^{n-1}}=\pm\frac{d^{n-1}L(a)}{2.3\ldots(n-1)da^{n-1}}$$

Or nous avons trouvé que $\Sigma\frac{1}{a}=L(a)=\int_0^1\frac{x^{a-1}-1}{x-1}\,dx$.

On en tire donc en différentiant par rapport à a:

$$\frac{d\Sigma\frac{1}{a}}{da}=\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)}{x-1}.dx$$

$$\frac{d^2\Sigma\frac{1}{a}}{da^2}=\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^2}{x-1}.dx$$

$$\frac{d^3\Sigma\frac{1}{a}}{da^3}=\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^3}{x-1}.dx$$

etc.

$$\frac{d^{n-1}\Sigma\frac{1}{a}}{da^{n-1}}=\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^{n-1}}{x-1}.dx$$

En substituant ces valeurs, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^2}=-\int_0^1\frac{x^{a-1}.lx}{x-1}.dx$$

$$\Sigma\frac{1}{a^3}=\frac{1}{2}.\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^2}{x-1}.dx$$

$$\Sigma\frac{1}{a^4}=-\frac{1}{2.3}\int_0^1\frac{x^{a-1}.(lx)^3}{x-1}.dx$$

etc.

$$\Sigma\frac{1}{a^{2n}}=-\frac{1}{2.3.4..(2n\text{-}1)}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{2n-1}}{x-1}\ dx$$

$$\Sigma\frac{1}{a^{n+1}}=+\frac{1}{2.3.4..2n}\int_0^1\frac{x^{a-1}(lx)^{2n}}{x-1}.dx$$

En général, quel que soit α, on aura

$$\Sigma\frac{1}{a^\alpha}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1\frac{x^{a-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}.dx.$$

Désignons $\Sigma\frac{1}{a^\alpha}$ par $L(a,\alpha)$, et nous aurons

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1\frac{x^{a-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}.dx+C. \qquad (1)$$

En développant $\frac{x^{a-1}}{x-1}$ en série infinie, il viendra

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}.\left[\int_0^1 x^{a-2}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\int_0^1 x^{a-3}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\int_0^1 x^{a-4}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx+\text{etc.}\right]$$

or $\int_0^1 x^{a-k-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^\alpha}$. et par conséquent

$$L(a,\alpha)=\frac{1}{(a\text{-}1)^\alpha}+\frac{1}{(a\text{-}2)^\alpha}+\frac{1}{(a\text{-}3)^\alpha}+\ldots\text{ in inf.}+C,$$

où C est une constante indépendante de a. Pour la trouver, faisons dans (1) $a=1$, ce qui donne $L(1,\alpha)=0$ et $x^{a-1}=x^0=1$; par conséquent

$$C = -\frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}\, dx.$$ On tire de là

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \int_0^1 \frac{x^{a-1}-1}{x-1} \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx$$

où α peut être positif, négatif où zéro.

On a $x^{a-1} = \left(\frac{1}{x}\right)^{-a+1} = 1 - (a-1)\left(l\frac{1}{x}\right) + \frac{(a-1)^2}{2}\cdot\left(l\frac{1}{x}\right)^2 - \frac{(a-1)^3}{2.3}\left(l\frac{1}{x}\right)^3 + \text{etc.}$

Substituant cette valeur, on aura

$$L(a,\alpha) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left\{ (a-1)\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha}}{1-x} dx - \frac{(a-1)^2}{2}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+1}}{1-x}.dx + \frac{(a-1)^3}{2.3}\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha+2}}{1-x}.dx - \ldots \right\}$$

Considérons l'éxpression $\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}$. En développant $\frac{1}{1-x}$, on aura

$$\int \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x}.dx = \int \left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \int x\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \int x^2\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx + \ldots$$

or $\int_0^1 x^n.\left(l\frac{1}{x}\right)^k dx = \frac{\Gamma(k+1)}{(n+1)^{k+1}}$, donc

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{x}\right)^k}{1-x} = \Gamma(k+1)\left(1 + \frac{1}{2^{k+1}} + \frac{1}{3^{k+1}} + \frac{1}{4^{k+1}} + \ldots\right),$$

donc enfin

$$\begin{aligned} L(a,\alpha) = {} & \frac{(a-1).\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha+1}} + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \frac{1}{4^{\alpha+1}} + \ldots\right) \\ & - \frac{(a-1)^2.\Gamma(\alpha+2)}{2.\Gamma(\alpha)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha+2}} + \frac{1}{3^{\alpha+2}} + \frac{1}{4^{\alpha+2}} + \ldots\right) \\ & + \frac{(a-1)^3.\Gamma(\alpha+3)}{2.3\Gamma(\alpha)} \cdot \left(1 + \frac{1}{2^{\alpha+3}} + \frac{1}{3^{\alpha+3}} + \frac{1}{4^{\alpha+3}} + \ldots\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

or on a $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\Gamma(\alpha+2) = \alpha(\alpha+1)\Gamma(\alpha)$ et en général $\Gamma(\alpha+k) = \alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\ldots(\alpha+k-1)\,\Gamma(\alpha)$. Substituant cas valeurs, on obtient

$$\begin{aligned} L(a,\alpha) = {} & \frac{a-1}{1}.\alpha\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha+1}} + \frac{1}{3^{\alpha+1}} + \frac{1}{4^{\alpha+1}} + \ldots\right) \\ & - \frac{(a-1)^2}{1.2}\alpha.(\alpha+1)\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha+2}} + \frac{1}{3^{\alpha+2}} + \frac{1}{4^{\alpha+2}} + \ldots\right) \\ & + \frac{(a-1)^3}{1.2.3}\alpha.(\alpha+1)(\alpha+2)\left(1 + \frac{1}{2^{\alpha+3}} + \frac{1}{3^{\alpha+3}} + \frac{1}{4^{\alpha+3}} + \ldots\right) \\ & \text{etc.} \end{aligned}$$

Si l'on pose a infini, on aura

$$L(\infty,\alpha)=1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\frac{1}{4^\alpha}+\ldots \text{etc.}$$

donc en désignant $L(\infty,\alpha)$ par $L'(\alpha)$

$$L(a,\alpha)=\alpha\,.L'(\alpha+1).(a-1)-\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}L'(\alpha+2).(a-1)^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{2\,.\,3}L'(\alpha+3).(a-1)^3-\ldots\text{etc.}$$

Si dans la formule (1) on met $\frac{m}{a}$ au lieu de a, on aura

$$L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^1\frac{\left(x^{\frac{m}{a}-1}-1\right).\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}}{x-1}.dx$$

Faisant $x^{\frac{1}{a}}=y$, x devient $=y^a$, $dx=ay^{a-1}$, $\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}=a^{\alpha-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}$ et par suite

$$L\left(\frac{m}{a},\alpha\right)=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^1\frac{(y^{m-a}-1)\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}\cdot y^{a-1}}{y^a-1}.dy=\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^1\frac{y^{m-1}-y^{a-1}}{y^a-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}.dy$$

On tire de là

$$L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right)=-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\cdot\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1}.dy+\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^1\frac{y^{m-1}.\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a-1}.dy$$

Si maintenant $m-1<a$, ce qu'on peut supposer, la fraction $\frac{y^{m-1}}{y^a-1}$ est résoluble en fractions partielles de la forme $\frac{A}{1-cy}$. On aura donc

$$L\left(\frac{m}{a},\ \alpha\right)=\left\{A.\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy+A'\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-c'y}.dy+\text{etc.}\right\}\cdot\frac{a^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

Si l'on développe $\frac{1}{1-cy}$ en série, on voit que

$$\int\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy=\int\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+c\int y\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+c^2\int y^2\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy+\ldots$$

or $\int_0^1\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}y^k.dy=\frac{\Gamma(\alpha)}{(k+1)^\alpha}$, donc

$$\int_0^1\frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy=\Gamma(\alpha)\cdot\left(1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\ldots\right),$$ donc en désignant $1+\frac{c}{2^\alpha}+\frac{c^2}{3^\alpha}+\frac{c^3}{4^\alpha}+\ldots$ par $L'(\alpha,c)$, on aura

$$\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1-cy}.dy = \Gamma(\alpha).L'(\alpha, c);$$ on obtiendra donc enfin:

$$L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right) = a^\alpha\left(A.L'(\alpha, c) + A'.L'(\alpha, c') + A''.L'(\alpha, c'') + \text{etc.}\right)$$

La fonction $L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right)$ peut donc, lorsque m et a sont des nombres entiers, être exprimée sous forme finie à l'aide des fonctions $\Gamma(\alpha)$ et $L'(\alpha, c)$. Soit p. ex. $m=1$, $a=2$, on aura

$$L(\tfrac{1}{2}, \alpha) = \frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1 \frac{1-y}{y^2-1}.\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1} dy = -\frac{2^\alpha}{\Gamma(\alpha)}.\int_0^1 \frac{\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{1+y}.$$ On a par conséquent $A=-1$ et $c=-1$. donc

$$L(\tfrac{1}{2}, \alpha) = -2^\alpha.L'(\alpha, -1) = -2^\alpha\left(1 - \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} - \frac{1}{4^\alpha} + \ldots\right)$$

Lorsque α est un nombre entier, on sait que la somme de cette série peut s'exprimer par le nombre π ou par le logarithme de 2. Soit $\alpha=1$, et l'on a $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots = \log 2$, donc $L(\frac{1}{2}, 1) = L(\frac{1}{2}) = -2\log 2$, ce que nous avons trouvé précédemment.

En posant $\alpha=2$, on a $1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots = \frac{\pi^2}{12}$, donc $L(\frac{1}{2}, 2) = -\frac{\pi^2}{3}$.

On peut en général exprimer $L(\frac{1}{2}, 2n)$ par $-M.\pi^{2n}$, où M est un nombre rationnel.

V.

Sur l'intégrale définie $\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{a-1}dx$

Dans les Exercices de calcul intégral de M. Legendre on trouve l'expression suivante

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.dx = \frac{\Gamma(a).\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)} \quad . \; . \; . \; (1)$$

donc

$$\log\left(\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}.dx\right) = \log\Gamma(a) + \log\Gamma(c) - \log\Gamma(a+c).$$

Différentiant par rapport à a et à c, et remarquant que

$$\frac{dl\Gamma(a)}{da} = La - C \text{ (Voyez pag. 21)}$$

on aura

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.lx.dx}{\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.dx} = L(a) - L(a+c)$$

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}l(1-x).dx}{\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.dx} = L(c) - L(a+c)$$

Ces deux équations combinées avec l'équation (1), donnent

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.lx.dx = \big(L(a) - L(a+c)\big).\frac{\Gamma(a).\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.l(1-x)dx = \big(L(c) - L(a+c)\big).\frac{\Gamma(a).\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)}.$$

La dernière équation peut aussi se déduire de l'avant-dernière en échangeant a et c entre eux, et mettant $1-x$ à la place de x.

Lorsque $c=1$, on a, à cause de $L(1+a) = \frac{1}{a} + L(a)$, et $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$,

$$\int_0^1 x^{a-1}.lx.dx = -\frac{1}{a^2}, \text{ résultat connu,}$$

et $\int_0^1 x^{a-1}.l(1-x).dx = -\frac{L(1+a)}{a}$, donc $L(1+a) = -a\int_0^1 x^{a-1}.l(1-x).dx$

5 *

Développant $(1-x)^{c-1}$ en série on trouvera:

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \int_0^1 x^{a-1}.l\left(\frac{1}{x}\right)dx - (c-1)\int_0^1 x^a l\left(\frac{1}{x}\right)dx$$
$$+\frac{(c-1)(c-2)}{2}\int_0^1 x^{a+1}\left(l\frac{1}{x}\right)dx - \text{etc.}$$

$$\text{or } \int_0^1 x^k.l\left(\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{(k+1)^2}; \text{ donc}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right).dx = \frac{1}{a^2} - (c-1).\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^2} + ..$$

$$\text{mais } \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right).dx = \left(L(a+c) - L(a)\right)\frac{\Gamma(a).\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)}, \text{ donc}$$

$$\left(L(a+c)-L(a)\right)\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)} = \frac{1}{a^2} - (c-1).\frac{1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^2} - \frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^2} + \ldots (2)$$

Soit p. ex. $c = 1 - a$, on a $L(a+c) - L(a) = -L(a)$, $\Gamma(a+c) = 1$,

$$\Gamma(a).\Gamma(c) = \Gamma(a).\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}; \text{ donc}$$

$$-L(a).\frac{\pi}{\sin a\pi} = \frac{1}{a^2} + \frac{a}{(a+1)^2} + \frac{a(a+1)}{2(a+2)^2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3(a+3)^2} + \text{etc.}$$

Soit $a = \frac{1}{2}$, on a $-L(a) = 2\log 2$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, donc

$$2\pi\log 2 = 2^2 + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{2.5^2} + \frac{3.5}{2^2.3.7^2} + \frac{3.5.7}{2^3.3.4.9^2} + \ldots$$

Soit $a = 1-x$, $c = 2x-1$, on aura en remarquant que $L(1-x) - L(x) = \pi\cot\pi x$,

$$-\pi.\cot\pi x.\frac{\Gamma(1-x).\Gamma(2x-1)}{\Gamma(x)} = \frac{1}{(1-x)^2} - \frac{2x-2}{(2-x)^2} + \frac{(2x-2)(2x-3)}{2(3-x)^2} - \frac{(2x-2)(2x-3)(2x-4)}{2.3(4-x)^2} + \ldots$$

En échangeant a et c entre eux dans l'équation (2), on obtient

$$\left(L(a+c) - L(c)\right).\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)} = \frac{1}{c^2} - (a-1)\frac{1}{(c+1)^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2} - \ldots.$$

Divisant l'équation (2) par celle-ci membre à membre, on aura

$$\frac{L(a+c)-L(a)}{L(a+c)-L(c)} = \frac{\frac{1}{a^2} - \frac{c-1}{(a+1)^2} + \frac{(c-1)(c-2)}{2(a+2)^2} - \ldots}{\frac{1}{c^2} - \frac{a-1}{(c+1)^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{2(c+2)^2} - \ldots}$$

De cette équation on tirera en y faisant $c = 1$

$L(1+a) = a - \frac{a(a-1)}{2^2} + \frac{a(a-1)(a-2)}{2.3^2} - \ldots$, donc en écrivant $-a$ pour a,

$L(1-a) = -\left(a + \frac{a(a+1)}{2^2} + \frac{a(a+1)(a+2)}{2.3^2} + \ldots\right)$, et en mettant $a-1$ au lieu de a,

$$L(a) = (a-1) - \frac{(a-1)(a-2)}{2^2} + \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2} - \ldots$$

on tire de là

$$L(a-1)-L(a)=\pi.\cot\pi a=-\left(2a+1+\frac{a(a+1)+(a-1)(a-2)}{2^2}+\frac{a(a+1)(a+2)-(a-1)(a-2)(a-3)}{2.3^2}+..\right)$$

Si dans l'équation (2) on pose $a=1$, on aura

$$\left(L(c+1)-L(1)\right)\frac{\Gamma(1).\Gamma c}{\Gamma(c+1)}=\frac{L(1+c)}{c}=1-\frac{(c-1)}{2^2}+\frac{(c-1)(c-2)}{2.3^2}-\dots$$

comme auparavant. Faisant $c=0$, il vient

$$\frac{L(1)}{0}=\frac{0}{0}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\dots=\frac{\pi^2}{6}.$$

Nous avons vu que

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right).dx=\left(L(a+c)-L(a)\right).\frac{\Gamma(a).\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)}.$$

Différentiant cette équation logarithmiquement, il viendra

$$\frac{\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2.\,dx}{\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right).\,dx}=-\frac{\left(\frac{dL(a+c)}{da}-\frac{dL(a)}{da}\right)}{L(a+c)-La}+L(a+c)-L(a)$$

or on a $\frac{dL(a)}{da}=-\Sigma\frac{1}{a^2}$. Soit $\Sigma\frac{1}{a^2}=L'(a)$, et l'on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^2.dx=\left[\left(L'(a+c)-L'(a)\right)+\left(L(a+c)-L(a)\right)^2\right].\frac{\Gamma(a).\Gamma(c)}{\Gamma(a+c)}$$

Si l'on désigne $\Sigma\frac{1}{a^3}$ par $L''(a)$, $\Sigma\frac{1}{a^4}$ par $L'''(a)$ etc., on obtiendra par une différentiation répetée

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^3.\,dx=\left[2\left(L''(a+c)-L''(a)\right)+\right.$$

$$\left.3\left(L'(a+c)-L'(a)\right)\left(L(a+c)-L(a)\right)+\left(L(a+c)-L(a)^3\right)\right]\frac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}$$

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^4.\,dx=\text{etc.}$$

En différentiant l'équation (2) par rapport à a, on aura

$$\int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^2.\,dx=2\left(\frac{1}{a^3}-\frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^3}+\frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^3}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^3}+\text{etc.}\right)$$

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^3.dx=2.3\left(\frac{1}{a^4}-\frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^4}+\frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^4}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^4}+\text{etc.}\right)$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}.dx=\Gamma\alpha\left(\frac{1}{a^\alpha}-\frac{c-1}{1}.\frac{1}{(a+1)^\alpha}+\frac{(c-1)(c-2)}{2}.\frac{1}{(a+2)^\alpha}-\frac{(c-1)(c-2)(c-3)}{2.3}.\frac{1}{(a+3)^\alpha}+\text{etc.}\right)$$

Or la fonction $\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}dx$ est exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', ... $L^{(\alpha-1)}$ donc la somme de la série infinie

$$\frac{1}{a^\alpha} - \frac{c\text{-}1}{1} \cdot \frac{1}{(a+1)^\alpha} + \frac{(c\text{-}1)(c\text{-}2)}{2} \cdot \frac{1}{(a+2)^\alpha} - \text{etc.}$$

est exprimable par ces mêmes fonctions.

Il-y-a encore d'autres intégrales qui peuvent s'exprimer par les mêmes fonctions. En effet, soit

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \varphi(a,\ c),$$

on obtiendra par des différentiations successives par rapport à c,

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.l(1-x).\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \varphi'(c),$$

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l(1-x)\right)^2\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \varphi''(c),$$

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l(1-x)\right)^3\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \varphi'''(c),$$

et en général

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l(1-x)\right)^{\beta-1}\left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \varphi^{(\beta-1)}(c).$$

Or on a $\varphi(a,\ c) = \dfrac{d^{\alpha-1}\left(\dfrac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}\right)}{da^{\alpha-1}}$, donc en substituant cette valeur, on obtiendra l'expression générale suivante,

$$\int_0^1 x^{a-1}.(1-x)^{c-1}.\left(l(1-x)\right)^n(lx)^m \cdot \frac{d^{m+n}\left(\dfrac{\Gamma a.\Gamma c}{\Gamma(a+c)}\right)}{(da)^m.(dc)^n}.$$

et cette fonction est, comme nous venons de voir, exprimable par les fonctions Γ, L, L', L'', ... $L^{(n-1)}$ ... $L^{(m-1)}$.

On sait que

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1} dx = \Gamma(\alpha) \quad \ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

Différentiant par rapport à α on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{x}\right).dx = \frac{d\Gamma(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\left(\dfrac{d\Gamma\alpha}{\Gamma\alpha}\right)\Gamma\alpha}{d\alpha} = \Gamma(\alpha).\frac{dl\Gamma\alpha}{d\alpha}$$

$$\text{or } \frac{dl\Gamma\alpha}{d\alpha} = L(\alpha) - C, \text{ donc}$$

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{x}\right)dx = \Gamma(\alpha).\left(L(\alpha) - C\right)$$

différentiant encore, on aura

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{x}\right)^2 dx = \Gamma(\alpha).\left[(L(\alpha)-C)^2 - L'(\alpha)\right]$$

Une expression générale pour la fonction

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{x}\right)^n .dx$$

peut se trouver aisément comme il suit.

En différentiant l'équation (A) n fois de suite, on aura:

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{x}\right)^n .dx = \frac{d^n\Gamma(\alpha)}{d\alpha^n}.$$

or $\frac{dl\Gamma(\alpha)}{d\alpha} = L(\alpha) - C$. donc $l\Gamma(\alpha) = \int(L(\alpha)-C)d\alpha$

et $\Gamma(\alpha) = e^{\int[L(\alpha)-C]d\alpha}$, donc

$$\int_0^1 \left(l\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{x}\right)^n .dx = \frac{d^n\left(e^{\int(L\alpha-C)d\alpha}\right)}{d\alpha^n}$$

fonction qui est exprimable par les fonctions Γ, L, L', $L''\ldots L^{\alpha-1}$

Si l'on met e^y à la place de x, on a $l\frac{1}{x} = -y$, $ll\frac{1}{x} = l(-y)$, $dx = e^y dy$; donc

$$\int_{-\infty}^0 (-y)^{\alpha-1}(l(-y))^n.e^y dy = \frac{d^n\left(e^{\int(L\alpha-C)d\alpha}\right)}{d\alpha^n}$$

ou en changeant y en $-y$

$$\int_\infty^0 y^{\alpha-1}(ly)^n.e^{-y}.dy = -\frac{d^n\left(e^{\int(L\alpha-C)d\alpha}\right)}{d\alpha^n}.$$

Faisant $y = z^{\frac{1}{\alpha}}$, on a $y^{\alpha-1}dy = \frac{1}{\alpha}d(y^\alpha) = \frac{1}{\alpha}dz$, $ly = \frac{1}{\alpha}lz$, $e^{-y} = e^{-z^{\frac{1}{\alpha}}}$, et par suite

$$\int_\infty^0 (lz)^n.e^{-z^{\frac{1}{\alpha}}}dz = \alpha^{n+1}.\frac{d^n\left(e^{\int(L\alpha-C)d\alpha}\right)}{d\alpha^n}$$

ou en mettant α au lieu de $\frac{1}{\alpha}$

$$\int_\infty^0 (lz)^n.e^{-z^\alpha}.dz = (-1)^n.\alpha^{n-1}.\frac{d^n\left(e^{-\int(L\frac{1}{\alpha}-C)\frac{d\alpha}{\alpha^2}}\right)}{d\alpha^n}$$

ou bien

$$\int_0^\infty l\left(\frac{1}{x}\right)^n.e^{-x^\alpha}.dx = \alpha^{n-1}.\frac{d^n\left(e^{-\int(L\frac{1}{\alpha}-C)\frac{d\alpha}{\alpha^2}}\right)}{d\alpha^n}.$$

Posant $n=0$, on a $\int_0^\infty e^{-x^\alpha}.dx=\frac{1}{\alpha}.\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

Posant $n=1$, on a $\int_0^\infty\left(l\frac{1}{x}\right).e^{-x^\alpha}.dx=-\frac{1}{\alpha^2}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right)-C\right]$.

Si p. ex. $\alpha=2$, on aura $\int_0^\infty e^{-x^2}.dx=\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}\sqrt{(\pi)}$

et $$\int_0^\infty\left(l\frac{1}{x}\right).e^{-x^2}.dx=\frac{1}{4}\sqrt{(\pi)}\,(C+2\log 2),$$

en remarquant que $L(\frac{1}{2})=-2\log 2$. Il faut se rappeler que la constante C est égale à 0,57721566 . . .

Si dans l'équation (A) on pose $x=y^n$, on trouvera

$$\int_0^1 y^{n-1}.l\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy=\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha},\text{ lorsque } n \text{ est positif}$$

$$\int_\infty^1 y^{n-1}.l\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}dy=\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}.\text{ lorsque } n \text{ est négatif.}$$

Différentiant cette équation par rapport à α, on aura, lorsque n est positif

$$\int_0^1 y^{n-1}\left(l\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}\left(ll\frac{1}{y}\right).dy=\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}\left(L(\alpha)-C-\log n\right).$$

Soit $y=e^{-x}$, et l'on trouvera

$$\int_0^\infty e^{-nx}.x^{\alpha-1}.lx.dx=\frac{\Gamma(\alpha)}{n^\alpha}\left(L(\alpha)-C-\log n\right),$$

résultat qu'on peut aussi déduire aisément de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-x^\alpha}\,l\left(\frac{1}{x}\right)dx=-\frac{1}{\alpha^2}\,\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left[L\left(\frac{1}{\alpha}\right)-C\right].$$

VI.

Sommation de la série

$$y = \varphi(0) + \varphi(1).x + \varphi(2).x^2 + \varphi(3).x^3 + \ldots + \varphi(n)x^n$$

n étant un nombre entier positif fini ou infini, et $\varphi(n)$ une fonction algébrique rationnelle de n.

La fonction $\varphi(n)$ étant algébrique et rationnelle, elle est résoluble en termes de la forme An^α et $\frac{B}{(a+n)^\beta}$; y est donc résoluble en plusieurs séries de la forme

$$p = A.0^\alpha + A.x + A.2^\alpha.x^2 + A.3^\alpha.x^3 + \ldots + A.n^\alpha.x^n \quad \text{et}$$

$$q = \frac{B}{a^\beta} + \frac{Bx}{(a+1)^\beta} + \frac{Bx^2}{(a+2)^\beta} + \frac{B.x^3}{(a+3)^\beta} + \ldots + \frac{B.x^n}{(a+n)^\beta}.$$

La sommation de la série proposée est donc réduite à la sommation de ces deux séries.

Considérons d'abord la quantité p. Or $A.0^\alpha$ étant une quantité constante et A facteur de chaque terme de la série, nous poserons,

$$\frac{p - A.0^\alpha}{A} = f(\alpha, x). \quad \text{On a donc}$$

$$f(\alpha, x) = x + 2^\alpha.x^2 + 3^\alpha.x^3 + 4^\alpha.x^4 + \ldots + n^\alpha.x^n$$

divisant par x, on a

$$\frac{f(\alpha, x)}{x} = 1 + 2^\alpha.x + 3^\alpha.x^2 + \ldots + n^\alpha.x^{n-1};$$

multipliant par dx et intégrant, il vient

$$\int \frac{f(\alpha, x)}{x}.dx = x + 2^{\alpha-1}x^2 + 3^{\alpha-1}x^3 + \ldots + n^{\alpha-1}x^n$$

or en comparant cette série avec la précédente, on voit que

$$\int \frac{f(\alpha, x)}{x}.dx = f(\alpha - 1, x);$$

différentiant et multipliant par x, on en tire

$$f(\alpha, x) = \frac{x.df(\alpha-1, x)}{dx},$$

ou en écrivant seulement $f(\alpha)$, au lieu de $f(\alpha, x)$

$$f(\alpha)=\frac{x.df(\alpha-1)}{dx}.$$

Connaissant donc la valeur de $f(\alpha-1)$, on peut en déduire celle de $f(\alpha)$.

Mettant $\alpha-1$ au lieu de α, on aura

$$f(\alpha-1)=\frac{x.df(\alpha-2)}{dx};$$

substituant cette valeur dans l'équation précédente, il vient

$$f(\alpha)=\frac{x.d[x.d.f(\alpha-2)]}{dx^2};$$

mettant de plus $\alpha-2$, $\alpha-3$ etc. au lieu de α, on obtient

$$f(\alpha-2)=\frac{x.df(\alpha-3)}{dx}$$

$$f(\alpha-3)=\frac{x.df(\alpha-4)}{dx}$$

$$f(\alpha-4)=\frac{x.df(\alpha-5)}{dx}$$

. . . .

$$f(2)=\frac{x.df(1)}{dx}$$

$$f(1)=\frac{x.df(0)}{dx}.$$

Substituant ces valeurs, on en tire

$$f(\alpha)=\frac{x.d(x.d(x.d(x\ldots d(x.df(0)\ldots)))}{dx^\alpha}.$$

On a ainsi la fonction $f(\alpha)$ déterminée par la fonction $f(0)$. Or on a

$$f(0)=x+x^2+x^3+x^4+\ldots+x^n=\frac{x(1-x^n)}{1-x},\text{ donc}$$

$$f(\alpha)=x+2^\alpha.x^2+3^\alpha.x^3+\ldots+n^\alpha.x^n=\frac{x.d\left(x.d\left(x\ldots d\left(x.d\left(\frac{x(1-x^n)}{1-x}\ldots\right)\right)\right)\right)}{dx^\alpha}$$

Ainsi on connait donc la fonction $f(\alpha)$, et par suite on connait de même la fonction p. Si la suite va à l'infini, on a $f(0)=\frac{x}{1-x}$ et par conséquent

$$x+2^\alpha.x^2+3^\alpha.x^3+4^\alpha.x^4+\ldots=\frac{x.d\left(x.d\left(x\ldots d\left(x.d\left(\frac{x}{1-x}\right)\ldots\right)\right)\right)}{dx^\alpha}$$

En faisant successivement $\alpha=0, 1, 2, 3$ etc., on aura

$$x+x^2+x^3+x^4+\ldots=\frac{x}{1-x}$$

$$x+2x^2+3x^3+4x^4+\ldots=\frac{x.d\left(\frac{x}{1-x}\right)}{dx}=\frac{x}{(1-x)^2}$$

$$x+2^2x^2+3^2x^3+4^2x^4+\ldots=\frac{x.d\left[x.d\left(\frac{x}{1-x}\right)\right]}{dx^2}=\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}.$$

Considérons ensuite l'autre série, savoir

$$F(\alpha)=\frac{1}{a^\alpha}+\frac{x}{(a+1)^\alpha}+\frac{x^2}{(a+2)^\alpha}+\frac{x^3}{(a+3)^\alpha}+\ldots+\frac{x^n}{(a+n)^\alpha};$$

multipliant par x^a et ensuite différentiant, on aura

$$\frac{d[F(\alpha).x^a]}{dx}=\frac{x^{a-1}}{a^{\alpha-2}}+\frac{x^a}{(a+1)^{\alpha-1}}+\frac{x^{a+1}}{(a+2)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{x^{n+a-1}}{(a+n)^{\alpha-1}};$$

ou bien

$$\frac{d[F(\alpha).x^a]}{dx}=x^{a-1}\left(\frac{1}{a^{\alpha-1}}+\frac{x}{(a+1)^{\alpha-1}}+\frac{x^2}{(a+2)^{\alpha-1}}+\ldots\frac{x^n}{(a+n)^{\alpha-1}}\right).$$

On voit par là que

$$\frac{d[F(\alpha).x^a]}{dx}=x^{a-1}.F(\alpha-1);$$

en multipliant par dx et intégrant, on obtient

$$F(\alpha)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(\alpha-1)}{x^a}$$

On peut donc déterminer $F(\alpha)$ par $F(\alpha-1)$

Mettant maintenant $\alpha-1$, $\alpha-2$, etc. au lieu de α, on aura

$$F(\alpha-1)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(\alpha-2)}{x^a}$$

$$F(\alpha-2)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(\alpha-3)}{x^a}$$

. . . .

$$F(2)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(1)}{x^a}$$

$$F(1)=\frac{\int dx.x^{a-1}.F(0)}{x^a}.$$

On peut donc déterminer $F(\alpha)$ par $F(0)$, car on aura par substitution:

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^a}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int dx.x^{a-1}.F(0),$$

or $F(0)=1+x+x^2+\ldots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$, donc

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{dx}{x}\int\frac{dx.(x^{a-1}-x^{n+a})}{1-x}.$$

Si la série va à l'infini, on a $F(0)=\frac{1}{1-x}$, et par suite

$$F(\alpha)=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\quad\cdot\int\frac{dx}{x}\cdot\int dx\left(\frac{x^{a-1}}{1-x}\right)$$

Les quantités constantes, dues aux intégrations successives, dovient être des valeurs particulières des fonctions $F(0)$, $F(1)$, $F(2)\ldots F(\alpha)$.

Ayant ainsi déterminé les fonctions $f(\alpha)$ et $F(\alpha)$, on en tirera aisément la somme de la série proposée

$$\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2)x^2+\varphi(3)x^3+\ldots+\varphi(n).x^n.$$

Le procédé, dont on a fait usage pour trouver la somme de cette série à l'aide de la série $1+x+x^2+\ldots+x^n$, peut aussi servir à la détermination de la somme de la série

$$z=f(0).\varphi(0)+f(1).\varphi(1).x+f(2).\varphi(2).x^2+\ldots+f(n).\varphi(n).x^n$$

à l'aide de la série

$$f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\ldots+f(n)x^n,$$

où $f(n)$ signifie une fonction quelconque, et $\varphi(n)$ une fonction rationnelle. En effet la série z est résoluble en plusieurs séries de la forme

$$A.(f(1)x+2^\alpha.f(2).x^2+3^\alpha.f(3).x^3+\ldots+n^\alpha.f(n).x^n),$$

$$\text{et } A'.\left(\frac{f(0)}{a^\alpha}+\frac{f(1).x}{(a+1)^\alpha}+\frac{f(2).x^2}{(a+2)^\alpha}+\ldots\frac{f(n).x^n}{(a+n)^\alpha}\right).$$

Si l'on pose $f(0)+f(1)x+f(2).x^2+\ldots+f(n)x^n=s$, on trouvera précisément de la même manière que ci-dessus

$$f(1)x+2^\alpha.f(2).x^2+3^\alpha.f(3).x^3+\ldots+n^\alpha.f(n).x^n=\frac{x.d(x.d(x.d(x\ldots d(x.ds)\ldots)))}{dx^\alpha}$$

$$\frac{f(0)}{a^\alpha}+\frac{f(1)}{(a+1)^\alpha}.x+\frac{f(2)}{(a+2)^\alpha}.x^2+\ldots+\frac{f(n)}{(a+n)^\alpha}.x^n=\frac{1}{x^a}\int\frac{dx}{x}\cdot\int\frac{dx}{x}\ldots\int\frac{dx}{x}\cdot\int dx.x^{a-1}.ds.$$

Soit p. ex. $s=e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{2.3}+\frac{x^4}{2.3.4}+\ldots$

on aura

$$\frac{1}{a}+\frac{x}{a+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{a+2}+\frac{1}{2.3}\cdot\frac{x^3}{a+3}+\ldots=\frac{1}{x^a}\int dx.x^{a-1}.e^x$$

$$=\frac{e^x}{x}\left(1-\frac{(a-1)}{x}+\frac{(a-1)(a-2)}{x^2}-\frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{x^3}+\ldots\right)+\frac{c}{x^a}.$$

VII.

L'intégrale finie $\Sigma^n \varphi x$ exprimée par une intégrale définie simple.

On peut comme on sait, moyennant le théorème de Parseval exprimer l'intégrale finie $\Sigma^n \varphi x$ par une intégrale définie double, mais si je ne me trompe, on n'a pas exprimé la même intégrale par une intégrale définie simple. C'est ce qui est l'objet de ce mémoire.

En désignant par φx une fonction quelconque de x, il est aisé de voir qu'on peut toujours supposer.

$$\varphi x = \int e^{xv} . fv . dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

l'intégrale étant prise entre deux limites quelconques de v, indépendantes de x. La fonction fv désigne une fonction de v, dont la forme dépend de celle de φx.

En supposant $\Delta x = 1$, on aura en prenant l'intégrale finie des deux membres de l'équation (1)

$$\Sigma \varphi x = \int e^{vx} . \frac{fv}{e^v - 1} dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

où il faut ajouter une constante arbitraire.

En prenant une seconde fois l'intégrale finie, on obtiendra:

$$\Sigma^2 \varphi x = \int e^{vx} . \frac{fv}{(e^v - 1)^2} . dv.$$

En général on trouvera

$$\Sigma^n \varphi x = \int e^{vx} . \frac{fv}{(e^v - 1)^n} . dv \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

Pour compléter cette intégrale il faut ajouter au second membre une fonction de la forme

$$C + C_1 x + C_2 x^2 + \ldots + C_{n-1} x^{n-1}$$

C, C_1, C_2 etc. étant des constantes arbitraires.

Il s'agit maintenant de trouver la valeur de l'intégrale définie $\int e^{vx} . \frac{fv}{(e^v - 1)^n} . dv$. Pour cela je me sers d'un théorème dû à M. Legendre (Exerc. de calc. int. T. II. p. 189); savoir que

$$\frac{1}{4}\,\frac{e^v+1}{e^v-1}-\frac{1}{2v}=\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt\,.\sin vt}{e^{2\pi t}-1}.$$

On tire de cette équation

$$\frac{1}{e^v-1}=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt\,.\sin vt}{e^{2\pi t}-1}\;\ldots\ldots\ldots\ldots\;(4)$$

En substituant cette valeur de $\frac{1}{e^v-1}$ dans l'équation (2), on aura

$$\Sigma\varphi x=\int e^{vx}.\frac{fv}{v}.dv-\tfrac{1}{2}.\int e^{vx}.fv.dv+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.\int e^{vx}.fv.\sin vt.dv$$

Maintenant on tire de l'équation (1) en intégrant

$$\int\varphi x.dx=\iint e^{vx}.dx.fv.dv=\int e^{vx}.\frac{fv}{v}.dv;\ \text{donc}$$

$$\Sigma\varphi x=\int\varphi x.dx-\tfrac{1}{2}\varphi x+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.\int e^{vx}.fv.\sin vt\ dv.$$

L'intégrale $\int e^{vx}.fv.\sin vt.dv$ se trouve de la manière suivante. En mettant dans l'équation (1) au lieu de x successivement $x+t\sqrt{-1}$ et $x-t\sqrt{-1}$, on obtiendra

$$\varphi(x+t\sqrt{-1})=\int e^{vx}.e^{vt\sqrt{-1}}.fv.dv$$
$$\varphi(x-t\sqrt{-1})=\int e^{vx}.e^{-vt\sqrt{-1}}.fv.dv,$$

d'où l'on tire en retranchant et divisant par $2\sqrt{-1}$

$$\int e^{vx}.\sin vt.fv.dv=\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Par là l'expression de $\Sigma\varphi x$ devient

$$\Sigma\varphi x=\int\varphi x.dx-\tfrac{1}{2}\varphi x+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\cdot\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}\;\ldots\ldots\;(5)$$

Cherchons maintenant la valeur de l'intégrale générale

$$\Sigma^n\varphi x=\int e^{vx}.fv.\frac{dv}{(e^v-1)^n}.$$

Il n'est pas difficile de voir qu'on peut faire

$$\frac{1}{(e^v-1)^n}=(-1)^{n-1}\left(A_{0,n}.p+A_{1,n}.\frac{dp}{dv}+A_{2,n}.\frac{d^2p}{dv^2}+\ldots+A_{n-1,n}.\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$

en faisant $\frac{1}{e^v-1}=p$. $A_{0,n}$, $A_{1,n}$, ... sont des coefficiens numériques qui doivent être déterminés. Pour cela différentions l'équation précédente, et nous aurons

$$\frac{n.e^v}{(e^v-1)^{n+1}}=(-1)^n\left(A_{0,n}.\frac{dp}{dv}+A_{1,n}\frac{d^2p}{dv^2}+\ldots+A_{n-1,n}\frac{d^np}{dv^n}\right);$$

$$\text{or}\quad \frac{n.e^v}{(e^v-1)^{n+1}}=\frac{n}{(e^v-1)^n}+\frac{n}{(e^v-1)^{n+1}}$$

c'est-à-dire

$$\frac{n.e^v}{(e^v-1)^{n+1}}=n(-1)^{n-1}\left(A_{0,n}\,.\,p+A_{1,n}\,.\,\frac{dp}{dv}+\ldots+A_{n-1,n}\,.\,\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right)$$
$$+\,n\,(-1)^n\left(A_{0,n+1}.p+A_{1,n+1}.\frac{dp}{dv}+\ldots+A_{n,n+1}.\frac{d^np}{dv^n}\right).$$

En comparant ces deux expressions de $\frac{n.e^v}{(e^v-1)^{n+1}}$, on formera les équations suivantes:

$$A_{0,n+1}-A_{0,n}=0 \quad \text{ɔ:}\quad \Delta A_{0,n}=0$$
$$A_{1,n+1}-A_{1,n}=\frac{1}{n}A_{0,n} \quad \text{ɔ:}\quad \Delta A_{1,n}=\frac{1}{n}A_{0,n}$$
$$A_{2,n+1}-A_{2,n}=\frac{1}{n}A_{1,n} \quad \text{ɔ:}\quad \Delta A_{2,n}=\frac{1}{n}A_{1,n}$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots$$
$$A_{n-1,n+1}-A_{n-1,n}=\frac{1}{n}A_{n-2,n} \quad \text{ɔ:}\quad \Delta A_{n-1,n}=\frac{1}{n}A_{n-2,n}$$
$$A_{n,n+1}=\frac{1}{n}A_{n-1,n}$$

De là on tire aisément

$$A_{0,n}=1,\ A_{1,n}=\Sigma\frac{1}{n},\ A_{2,n}=\Sigma\left(\frac{1}{n}\,\Sigma\frac{1}{n}\right),\ A_{3,n}=\Sigma\left[\frac{1}{n}\,\Sigma\left(\frac{1}{n}\,\Sigma\frac{1}{n}\right)\right]\ \text{etc.}$$
$$A_{n,n+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1}\cdot A_{0,1}=\frac{1}{\Gamma(n+1)}\,.$$

Cette dernière équation servira à déterminer les constantes qui rentrent dans les expressions de $A_{1,n}$, $A_{2,n}$, $A_{3,n}$. etc. Ayant ainsi déterminé les coefficiens $A_{0,n}$, $A_{1,n}$, $A_{2,n}$, etc., on aura en substituant dans l'équation (5) au lieu de $\frac{1}{(e^v-1)^n}$ sa valeur

$$\Sigma^n\varphi x=(-1)^{n-1}\int e^{vx}.fv.dv\left(A_{0,n}.p+A_{1,n}.\frac{dp}{dv}+\ldots+A_{n-1,n}.\frac{d^{n-1}p}{dv^{n-1}}\right);$$

maintenant on a

$$p=\frac{1}{v}-\frac{1}{2}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$

d'où l'on tire en différentiant

$$\frac{dp}{dv}=-\frac{1}{v^2}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t.dt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1}$$
$$\frac{d^2p}{dv^2}=\quad\frac{2}{v^3}-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^2.dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1}$$
$$\frac{d^3p}{dv^3}=-\frac{2.3}{v^4}-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^3.dt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1}\quad\text{etc.}$$

donc en substituant

$$\Sigma^n\varphi x = \int\left(A_{n-1,n}.\frac{\Gamma(n)}{v^n} - A_{n-2,n}.\frac{\Gamma(n-1)}{v^{n-1}} + A_{n-3,n}.\frac{\Gamma(n-2)}{v^{n-2}} - \dots + (-1)^{n-1}A_{0,n} + (-1)^n.\tfrac{1}{2}\right)e^{vx}.fv.dv$$

$$+ 2(-1)^{n-1}\iint_0^{\frac{1}{0}}\frac{P.\sin vt.dt}{e^{2\pi t}-1}.e^{vx}.fv.dv + 2(-1)^{n-1}.\iint_0^{\frac{1}{0}}\frac{Q.\cos vt.dt}{e^{2\pi t}-1}.e^{vx}.fv.dv.$$

Cela posé, on tire de l'équation $\varphi x = \int e^{vx}.fv.dv$ les suivantes:

$$\int\varphi x.dx = \int e^{vx}.fv.\frac{dv}{v}$$

$$\int^2\varphi x.dx = \int e^{vx}.fv.\frac{dv}{v^2}$$

$$\int^3\varphi x.dx = \int e^{vx}.fv.\frac{dv}{v^3}$$

etc.

de même on aura

$$\int\sin vt.dv.e^{vx}.fv = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$\int\cos vt.dv.e^{vx}.fv = \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) + \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

donc on aura en substituant

$$\Sigma^n\varphi x = A_{n-1,n}.\Gamma(n).\int^n\varphi x.dx^n - A_{n-2,n}.\Gamma(n-1)\int^{n-1}\varphi x.dx^{n-1} + \dots + (-1)^{n-1}.\int\varphi x.dx + (-1)^n.\tfrac{1}{2}\varphi x$$

$$+ 2(-1)^{n-1}\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{P.dt}{e^{2\pi t}-1}.\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} + 2(-1)^{n-1}.\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{Q.dt}{e^{\pi t}-1}.\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

où $P = A_{0,n} - A_{2,n}.t^2 + A_{4,n}.t^4 - \dots$

$Q = A_{1,n} - A_{3,n}.t^3 + A_{5,n}.t^5 - \dots$

En faisant p. ex. $n=2$, on aura

$$\Sigma^2\varphi x = \iint\varphi x.dx^2 - \int\varphi x.dx + \tfrac{1}{2}\varphi x - 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$

$$-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})+\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2}$$

Soit p. ex. $\varphi x = e^{ax}$, on aura

$$\varphi(x\pm t\sqrt{-1}) = e^{ax}.e^{\pm at\sqrt{-1}},\ \int e^{ax}.dx = \frac{1}{a}.e^{ax},\ \iint e^{ax}.dx^2 = \frac{1}{a^2}.e^{ax}$$

donc en substituant et divisant par e^{ax}

$$\frac{1}{(e^a-1)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} - 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin at}{e^{2\pi t}-1} - 2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\cos at}{e^{2\pi t}-1}.$$

Le cas le plus remarquable est celui où $n=1$. On a alors, comme on a vu précédemment:

$$\Sigma\varphi x = C + \int\varphi x . dx - \tfrac{1}{2}\varphi x + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En supposant que les deux intégrales $\Sigma\varphi x$ et $\int\varphi x\,dx$ s'évanouissent pour $x=a$, il est clair qu'on aura:

$$C = \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}};$$

donc

$$\Sigma\varphi x = \int\varphi x . dx - \tfrac{1}{2}(\varphi x - \varphi a) + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1})-\varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}$$
$$- 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Si l'on fait $x=\infty$, en supposant que φx et $\int\varphi x\,dx$ sont $=0$, pour cette valeur de x, on aura:

$$\left.\begin{array}{l} \varphi a + \varphi(a+1) + \varphi(a+2) + \varphi(a+3) + \ldots \text{ in inf.} \\ = \int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x . dx + \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} \end{array}\right\} \ldots \quad (6)$$

Soit p. ex. $\varphi x = \frac{1}{x^2}$, on aura

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{-2at}{(a^2+t^2)^2},$$

donc

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(a+1)^2} + \frac{1}{(a+2)^2} + \ldots = \frac{1}{2a^2} + \frac{1}{a} + 4a\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(e^{2\pi t}-1)(a^2+t^2)^2}$$

et en faisant $a=1$

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \ldots = \frac{\pi^2}{4} = \tfrac{3}{2} + 4\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{(1+t^2)^2(e^{2\pi t}-1)}.$$

On peut aussi par ce qui précède trouver la valeur de la série

$$\varphi a - \varphi(a+1) + \varphi(a+2) - \varphi(a+3) + \ldots$$

En effet en mettant $\varphi(2x)$ au lieu de φx et $\frac{1}{2}a$ au lieu de a, on obtiendra

$$\varphi a + \varphi(a+2) + \varphi(a+4) + \ldots = \tfrac{1}{2}\int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x\,dx + \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(a+2t\sqrt{-1})-\varphi(a-2t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

donc

$$2\varphi a + 2\varphi(a+2) + 2\varphi(a+4) + \ldots = \int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x\,dx + \varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t}-1} \cdot \frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En retranchant l'équation (6) de cette équation, on obtiendra, toutes les réductions faites:

$$\varphi a-\varphi(a+1)+\varphi(a+2)-\varphi(a+3)+\ldots=\tfrac{1}{2}\varphi a-2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-e^{-\pi t}}\cdot\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Soit p. ex. $\varphi x=\frac{1}{x}$, on aura

$$\frac{\varphi(a+t\sqrt{-1})-\varphi(a-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\frac{-t}{a^2+t^2},$$ donc

$$\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}+\ldots=\frac{1}{2a}+2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{(a^2+t^2)(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}$$

et en faisant $a=1$,

$$\log 2-\tfrac{1}{2}=2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{tdt}{(1+t^2)(e^{\pi t}-e^{-\pi t})}.$$

VIII.

Propriétés remarquables de la fonction $y = \varphi x$ déterminée par l'équation
$$fy \cdot dy - dx\sqrt{((a-y)(a_1-y)(a_2-y)\ldots(a_m-y))} = 0,$$
fy étant une fonction quelconque de y, qui ne devient pas zéro ou infinie lorsque $y = a, a_1, a_2, \ldots a_m$.

Soit pour abréger $(a-y)(a_1-y)\ldots(a_m-y) = \psi y$, on aura
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{fy} \cdot \sqrt{(\psi y)}.$$

En différentiant on aura un résultat de la forme
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{P}{\sqrt{(\psi y)}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P}{fy}$, où P est une fonction, qui ne devient pas infinie lorsque $\psi y = 0$.

En différentiant de nouveau, on aura
$$\frac{d^3y}{dx^3} = P_1 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P_1}{fy} \cdot \sqrt{(\psi y)};$$
de même
$$\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{P_2}{\sqrt{(\psi y)}} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P_2}{fy}, \quad \frac{d^5y}{dx^5} = P_3 \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{P_3}{fy} \cdot \sqrt{(\psi y)},$$
etc.

où P, P_1, P_2, P_3 etc. sont des fonctions de y, qui ne deviennent pas infinies lorsque $\psi y = 0$.

Cela posé, considérons l'équation
$$\varphi(x+v) = y + v^2Q_2 + v^4Q_4 + v^6Q_6 + \ldots$$
$$+ \sqrt{(\psi y)}(v \cdot Q_1 + v^3Q_3 + v^5Q_5 + \ldots)$$
où Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 etc. sont des fonctions qui ne deviennent pas infinies lorsque $\psi y = 0$.

Supposons maintenant que y ait une valeur qui rende ψy égale à zéro p. ex. $y = a$, on aura

$$\varphi(a+v)=a+v^2Q_2+v^4Q_4+v^6Q_6+\ldots$$

Q_2, Q_4, etc. sont ici des constantes, et a la valeur de x, qui répond à $y=a$ et qui est déterminée par l'expression

$$a=\int^a \frac{f(y)dy}{\sqrt{(\psi y)}}.$$

La fonction $\varphi(a+v)$ est donc une fonction paire de v. On a par conséquent

$$\varphi(a+v)=\varphi(a-v),$$

d'où l'on déduit en mettant $a-v$ au lieu de v:

$$\varphi(2a-v)=\varphi v.$$

Cela posé, on a de même

$$\varphi(2a_1-v)=\varphi v,$$

en désignant par a_1 l'expression $\int^{a_1} \frac{fy\,dy}{\sqrt{(\psi y)}}$,

dons aussi

$$\varphi(2a-v)=\varphi(2a_1-v),$$

d'où l'on tire en mettant $2a_1-v$ au lieu de v

$$\varphi(2a-2a_1+v)=\varphi v,$$

ce qui nous montre que la fonction φ est périodique. De là on déduit ensuite sans peine

$$\varphi\big(\pm 2n(a-a_1)+v\big)=\varphi v,$$

n étant un nombre entier quelconque.

On a de la même manière

$$\varphi\big(\pm 2n(a-a_2)+v\big)=\varphi v,$$

donc

$$\varphi\big(\pm 2n(a-a_1)+v\big)=\varphi\big(\pm 2n_1(a-a_2)+v\big)$$

et de là

$$\varphi\big(v\pm 2n(a-a_1)\pm 2n_1(a-a_2)\big)=\varphi v.$$

En général on aura

$$\varphi v=\varphi\big(v+2n(a-a_1)+2n_1(a-a_2)+2n_2(a-a_3)+\ldots+2n_{m-1}(a-a_m)\big)$$

n, n_1, n_2 etc. étant des nombres quelconques entiers positifs ou négatifs. Ou bien

$$\varphi v=\varphi(v+2na+2n_1a_1+2n_2a_2+\ldots+2n_ma_m)$$

$$\text{où}\quad n+n_1+n_2+\ldots+n_m=0.$$

Si l'on suppose que $\varphi(k)=0$, on aura, en faisant $v=k$,

$$\varphi(k+2na+2n_1a_1+\ldots+2n_ma_m)=0$$

On peut donc trouver une infinité de solutions de l'équation

$$\varphi(x)=0,$$

$$\text{si } \varphi(k)=0, \text{ savoir } x=k+2(n\alpha+n_1\alpha_1+\ldots+n_m\alpha_m)$$
$$\text{où} \quad n+n_1+n_2+\ldots n_m=0.$$

On peut aussi trouver une infinité de valeurs de x, qui rendent φx infinie. En effet il suffit pour cela dans l'équation

$$x=\int\frac{fy.dy}{\sqrt{(\psi y)}},$$

de changer y en $\frac{1}{z}$ et chercher ensuite par la méthode précédente les valeurs de x qui rendent $z=0$.

Pour éclaircir ce qui précède je donnerai un exemple.

Soit $fy=1$, $\psi y=1-y^2=(1-y)(1+y)$, on aura

$$x=\int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\text{arc}\sin y,$$

donc

$$y=\sin x=\varphi x.$$

Dans cet exemple on a $a=1$, $a_1=1$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$ $\alpha_1=-\frac{\pi}{2}$ on a donc

$$\varphi\left(\frac{\pi}{2}-v\right)=\varphi\left(\frac{\pi}{2}+v\right)$$
$$\varphi\left(-\frac{\pi}{2}-v\right)=\varphi\left(-\frac{\pi}{2}+v\right)$$
$$\varphi(\pi-v)=\varphi v,\ \varphi v=\varphi(v\pm 2n\pi),\ 0=\varphi(\pm n\pi).$$

IX.

Sur une propriété remarquable d'une classe très étendue de fonctions transcendantes.

Soit y une fonction de x, déterminée par l'équation

$$0 = sy + t.\frac{dy}{dx},$$

s et t étant deux fonctions entières de x.

Soit de même

$$\int rydx = tvy,$$

on aura en différentiant

$$ry = \left(v.\frac{dt}{dx} + t.\frac{dv}{dx}\right)y + vt.\frac{dy}{dx}$$

$$\text{or} \quad t.\frac{dy}{dx} = -sy, \text{ donc}$$

$$r = v\left(\frac{dt}{dx} - s\right) + t.\frac{dv}{dx}.$$

Cela posé, soit $v = \frac{1}{x-a}$, on aura

$$r = \frac{\frac{dt}{dx} - s}{x-a} - \frac{t}{(x-a)^2}$$

ou

$$r = \frac{\varphi' x - fx}{x-a} - \frac{\varphi x}{(x-a)^2}$$

en faisant $t = \varphi x$ et $s = fx$.

Or on voit sans peine que

$$\frac{\varphi' x\text{-}fx}{x-a} = \frac{\varphi' a\text{-}fa}{x-a} + \varphi'' a - f'a + \frac{\varphi''' a\text{-}f'' a}{1}(x-a) + \frac{\varphi'''' a\text{-}f''' a}{2.3}(x-a)^2 + \dots$$

$$\frac{\varphi x}{(x-a)^2} = \frac{\varphi a}{(x-a)^2} + \frac{\varphi' a}{x-a} + \frac{\varphi'' a}{2} + \frac{\varphi''' a}{2.3}(x-a) + \frac{\varphi'''' a}{2.3.4}(x-a)^2 + \dots$$

donc on aura

$$r = -\frac{\varphi a}{(x-a)^2} - \frac{fa}{x-a} + R,$$

d'où l'on tire en multipliant par ydx, et intégrant

$$rty = -\varphi a . \int \frac{ydx}{(x-a)^2} - fa . \int \frac{ydx}{x-a} + \int Rydx.$$

Cela posé, soit $z = \int \frac{ydx}{x-a}$, on aura en différentiant

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{ydx}{(x-a)^2},$$

donc en substituant

$$rty = -\varphi a . \frac{dz}{da} - fa . z + \int Rydx.$$

Soit $z = qp$, on aura en substituant

$$\int Rydx - rty = \varphi a . p . \frac{dq}{da} + \varphi a . q . \frac{dp}{da} + pq . fa$$

Soit $\varphi a . \frac{dq}{da} + fa . q = 0$, on aura

$q = \psi a$ en faisant $y = \psi x$

et $$\int Rydx - \frac{t . \psi x}{x-a} = \varphi a . \psi a . \frac{dp}{da}$$

donc $$p = \iint \frac{R . \psi x}{\varphi a . \psi a} . dx . da - \int \frac{\psi x . \varphi x}{\psi a . \varphi a} . \frac{da}{x-a},$$

donc

$$\frac{1}{\psi a} . \int \frac{\psi x . dx}{x-a} - \psi x . \varphi x \int \frac{da}{(a-x) \psi a . \varphi a} = \iint \frac{R . \psi x}{\varphi a . \psi a} . dx \, da \quad . \; . \quad . \quad (1)$$

où l'on a

$$R = \tfrac{1}{2} \varphi'' a - f' a + (\tfrac{1}{3} \varphi''' a - \tfrac{1}{2} f'' a)(x-a) + (\tfrac{1}{2 \cdot 4} \varphi'''' a - \tfrac{1}{2 \cdot 3} f''' a)(x-a)^2 + \ldots$$

Le second membre de l'équation (1) peut, comme on le voit, toujours être développé en plusieurs termes de la forme :

$$A_{m,n} . \int \frac{a^m . da}{\varphi a . \psi a} . \int x^n . \psi x . dx.$$

En faisant $\varphi x = \alpha + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 x^3 + \ldots$

et $fx = \beta + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \ldots$

il est facile de trouver

$$A_{m,n} = (n+1) . \alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1};$$

donc on aura la formule générale :

$$\frac{1}{\psi a} . \int \frac{\psi x . dx}{x-a} - \psi x . \varphi x \int \frac{da}{(a-x) \varphi a . \psi a} = \Sigma \big((n+2) \alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1} \big) \int \frac{a^m da}{\varphi a . \psi a} . \int x^n \psi x dx . (2)$$

Il faut remarquer que les intégrales par rapport à x doivent être faites depuis une valeur de x qui réduit à zéro la fonction $\psi x . \varphi x$, et celles par rapport à a depuis une valeur de cette variable qui réduit à zéro la fonction $\frac{1}{\psi a}$.

La fonction $y = \psi x$ étant déterminée par l'équation

$$y.fx + \varphi x.\frac{dy}{dx} = 0,$$

il est clair qu'on a

$$y = e^{-\int \frac{fx}{\varphi x}.dx};$$

donc y est de la forme

$$\psi x = \frac{e^p}{(x-\delta)^m.(x-\delta_1)^{m_1}\dots}$$

m, m_1, etc. étant des nombres positifs moindre que l'unité. p est une fonction rationnelle, qui s'évanouit lorsque tous les facteurs de φx sont inégaux et en même temps le degré de fx est moindre que celui de φx.

Supposons maintenant qu'on prenne les intégrales entre deux limites de x qui rendent égale à zéro la fonction $\varphi x.\psi x$, on aura

$$\int \frac{\psi x.dx}{x-a} = \psi a \Sigma\big((n+1).\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\big)\int x^n.\psi x.dx.\int \frac{a^m.da}{\varphi a.\psi a} \quad . \; . \; (3)$$

Si l'on donne de même à a une telle valeur que $\frac{1}{\psi a}$ devient égal à zéro on aura:

$$0 = \Sigma\big((n+1)\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1}\big)\int x^n.\psi x\,dx.\int \frac{a^m da}{\varphi a.\psi a} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (4)$$

Il y a un cas remarquable qu'il est important de considérer à part, savoir celui où

$$\frac{1}{\psi x} = \varphi x.\psi x;$$

on a alors

$$\psi x = y = \frac{1}{\sqrt{(\varphi x)}}$$

donc

$$\frac{dy}{dx} = -\tfrac{1}{2}.\frac{\varphi' x}{[\sqrt{(\varphi x)}]^3}.$$

L'équation $y.fx + \varphi x.\frac{dy}{dx} = 0$ devient donc

$$fx - \tfrac{1}{2}\varphi' x = 0$$

donc

$$fx = \tfrac{1}{2}\varphi' x$$

et

$$\beta_m = \tfrac{1}{2}(m+1)\alpha_{m+1}.$$

L'équation (2) devient donc dans ce cas:

$$\sqrt{(\varphi a)}.\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(\varphi x)}} - \sqrt{(\varphi x)}\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(\varphi a)}} = \Sigma\tfrac{1}{2}(n-m)\alpha_{m+n+2}.\int \frac{x^n dx}{\sqrt{(\varphi x)}}.\int \frac{a^m da}{\sqrt{(\varphi a)}}.(5)$$

Pour vérifier cette formule dans un cas particulier, soit $\varphi x = 1 - x^2$, on aura $\alpha = 1$, $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -1$,

$$\sqrt{(1-a^2)}.\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)}}-\sqrt{(1-x^2)}.\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)}}=0,$$

ce qui est vrai, car on a

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(1-x^2)}}=\frac{1}{2\sqrt{(1-a^2)}}.\log\left(\frac{ax-1+\sqrt{(1-a^2)}.\sqrt{(1-x^2)}}{ax-1-\sqrt{(1-a^2)}.\sqrt{(1-x^2)}}\right)$$

$$\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(1-a^2)}}=\frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)}}.\log\left(\frac{ax-1+\sqrt{(1-a^2)}.\sqrt{(1-x^2)}}{ax-1-\sqrt{(1-a^2)}.\sqrt{(1-x^2)}}\right)$$

Si l'on fait $\varphi x=(1-x^2)(1-c^2x^2)$, on a

$$\alpha=1,\ \alpha_1=0,\ \alpha_2=-(1+c^2),\ \alpha_3=0,\ \alpha_4=c^2,\ \text{donc}$$

$$\sqrt{((1-a^2)(1-c^2a^2))}.\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}-\sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))}.\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}}$$

$$=c^2\int\frac{x^2dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.\int\frac{da}{\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}}-c^2\int\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}.\int\frac{a^2da}{\sqrt{[(1-a^2)(1-c^2a^2)]}}.$$

Cette formule contient implicitement les propriétés remarquables des fonctions elliptiques que M. Legendre a données dans ses Ex. de calc. int. T. 1. p. 134 et sq.

X.

Extension de la théorie précédente.

Soit y une fonction qui satisfait à l'équation

$$0 = s.y + s_1.\frac{dy}{dx} + s_2.\frac{d^2y}{dx^2} + . . + s_m.\frac{d^my}{dx^m} \quad . . . . (1)$$

$s, s_1, s_2 \ldots$ étant des fonctions entières de x.

Soit de même

$$\int rydx = v.y + v_1.\frac{dy}{dx} + \ldots + v_{m-2}.\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + ts_m.\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}},$$

on aura en différentiant:

$$ry = \frac{dv}{dx}.y + \left(v + \frac{dv_1}{dx}\right).\frac{dy}{dx} + \left(v_1 + \frac{dv_2}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \ldots + \left(v_{m-2} + \frac{d(ts_m)}{dx}\right)\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + ts_m.\frac{d^my}{dx^m};$$

$$\text{or} \quad s_m.\frac{d^my}{dx^m} = -sy - s_1.\frac{dy}{dx} - s^2.\frac{d^2y}{dx^2} - \ldots - s_{m-1}\ \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}};$$

donc on aura en substituant et égalant ensuite à zéro les divers coefficiens:

$$-r = st - \frac{dv}{dx}$$

$$v = s_1t - \frac{dv_1}{dx}$$

$$v_1 = s_2t - \frac{dv_2}{dx}$$

. . . .

$$v_{m-2} = s_{m-1}t - \frac{d(ts_m)}{dx}.$$

De là on tire aisément

$$\left.\begin{aligned} v_{\mu-1} &= s_\mu.t - \frac{d(s_{\mu+1}t)}{dx} + \frac{d^2(s_{\mu+2}t)}{dx} - \ldots \\ -r &= s.t - \frac{d(s_1t)}{dx} + \frac{d^2(s_2t)}{dx^2} - \ldots \pm \frac{d^{m-1}(s_{m-1}t)}{dx^{m-1}} \mp \frac{d^m(s_mt)}{dx^m} \end{aligned}\right\} \quad . . . (2)$$

Cela posé, soit $t = \dfrac{1}{x-a}$; et supposons que

$$\left.\begin{array}{l} st = \frac{s'}{x-a} + R \\ s_1 t = \frac{s'_1}{x-a} + R_1 \\ s_2 t = \frac{s'_2}{x-a} + R_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{m-1} t = \frac{s'_{m-1}}{x-a} + R_{m-1} \\ s_m t = \frac{s'_m}{x-a} + R_m \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots (3)$$

s', s'_1, s'_2 etc. étant des constantes et R, R_1, $R_2 \ldots$ des fonctions entières de x, il est clair que s'_μ est la même fonction de a que s_μ l'est de x. En différentiant on trouvera

$$\frac{d^\mu (s_\mu t)}{dx^\mu} = (-1)^\mu \Gamma(\mu+1) \cdot \frac{s'_\mu}{(x-a)^{\mu+1}} + \frac{d^\mu R}{dx^\mu};$$

donc la valeur de $-r$ devient

$$-r = \frac{s'}{x-a} + \frac{s'_1}{(x-a)^2} + \Gamma 3 \cdot \frac{s'_2}{(x-a)^3} + \Gamma 4 \cdot \frac{s'_3}{(x-a)^4} + \ldots \Gamma(m+1) \cdot \frac{s'_m}{(x-a)^{m+1}} + \varrho \,.(4)$$

en faisant $$\varrho = R - \frac{dR_1}{dx} + \frac{d^2 R_2}{dx^2} - \ldots \mp \frac{d^m R_m}{dx^m}.$$

Cela posé soit

$$z = \int \frac{y\,dx}{x-a};$$

on aura en différentiant par rapport à a

$$\frac{dz}{da} = \int \frac{y\,dx}{(x-a)^2}$$

$$\frac{d^2 z}{da^2} = \Gamma 3 \int \frac{y\,dx}{(x-a)^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{d^m z}{da^m} = \Gamma(m+1) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}};$$

or en multipliant la valeur de r par ydx et intégrant, on obtiendra

$$-\chi' = s' \cdot \int \frac{y\,dx}{x-a} + s'_1 \int \frac{y\,dx}{(x-a)^2} + s'_2 \cdot \Gamma 3 \int \frac{y\,dx}{(x-a)^3} + \ldots + s'_m \Gamma(m+1) \int \frac{y\,dx}{(x-a)^{m+1}} + \int \varrho y\,dx$$

en faisant pour abréger

$$\chi = vy + v_1 \cdot \frac{dy}{dx} + \ldots + v_{m-2} \cdot \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + s_m t \cdot \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$$

et $\chi' = \chi - \chi_0$

On a donc l'équation suivante en z

$$-\chi'-\int\varrho y dx = s'.z + s'_1.\frac{dz}{da} + s'_2.\frac{d^2z}{da^2} + \ldots + s'_m.\frac{d^mz}{da^m} \quad \ldots . (5)$$

Supposons maintenant qu'on connaît l'intégrale complète de l'équation différentielle qui détermine la fonction y, et soit

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \ldots + c_m y_m$$

cette intégrale. On trouvera alors, comme on voit sans peine,

$$z = y'_1 \int p_1 da + y'_2 \int p_2 da + y'_3 \int p_3 da + \ldots + y'_m \int p_m da,$$

où y'_μ est la même fonction de a que y_μ l'est de x, et p_1, $p_2\ldots$ des fonctions rationnelles de y'_1, y'_2, $y'_3\ldots$ et de leurs différentielles, et des fonctions entières de $\chi' + \int\varrho y dx$ de la forme

$$p_\mu = \frac{\theta_\mu.(\chi' + \int\varrho y dx)}{s'_m}.$$

On a donc:

$$\int\frac{ydx}{x-a} = y'_1.\int\frac{da.\theta_1(\chi'+\int\varrho y dx)}{s'_m} + y'_2.\int\frac{da\theta_2(\chi'+\int\varrho y dx)}{s'_m} + \ldots + y'_m.\int\frac{da\theta_m(\chi'+\int\varrho y dx)}{s'_m} . (6)$$

Quant aux quantités θ_1, θ_2, etc. on peut remarquer qu'elles sont déterminées par les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l}
0 = y'_1.\theta_1 + y'_2.\theta_2 + y'_3.\theta_3 + \ldots + y'_m.\theta_m \\
0 = \frac{dy'_1}{da}.\theta_1 + \frac{dy'_2}{da}.\theta_2 + \frac{dy'_3}{da}.\theta_3 + \ldots \frac{dy'_m}{da}.\theta_m \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 = \frac{d^{m-2}y'_1}{da^{m-2}}\theta_1 + \frac{d^{m-2}y'_2}{da^{m-2}}\theta_2 + \frac{d^{m-2}y'_3}{da^{m-2}}\theta_3 + \ldots + \frac{d^{m-2}y'_m}{da^{m-2}}\theta_m \\
-1 = \frac{d^{m-1}y'_1}{da^{m-1}}\theta_1 + \frac{d^{m-1}y'_2}{da^{m-1}}\theta_2 + \frac{d^{m-1}y'_3}{da^{m-1}}\theta_3 + \ldots + \frac{d^{m-1}y'_m}{da^{m-1}}\theta_m
\end{array}\right\} \ldots\ldots (7)$$

Les quantités θ_1. θ_2, $\theta_3\ldots$ sont donc des fonctions de a seul. Pour appliquer ce qui précède, supposons $m=1$ et $m=2$.

1. Si $m=1$, on aura

$$-1 = y'_1.\theta_1, \text{ donc } \theta_1 = -\frac{1}{y'_1},$$

de même

$$\chi = s_1 ty = \frac{s_1 y}{x-a}, \ \chi' = \chi \text{ en supposant } \chi_0 = 0,$$

donc l'équation (6) deviendra

$$\int\frac{ydx}{x-a} = -y'_1.\int da\,\frac{1}{s'_1 y'_1}\left(\frac{s_1 y}{x-a} + \int\varrho y dx\right)$$

c'est-à-dire

$$\int \frac{y dx}{x-a} + s_1 y'_1 y \cdot \int \frac{da}{(x-a) y'_1 s'_1} = - y'_1 \cdot \iint \varrho \, \frac{y}{y'_1 s'_1} \, dx \, da$$

la même équation que l'équation (1) du mémoire précédent.

2. Si $m = 2$, on aura

$$0 = y'_1 \cdot \theta_1 + y'_2 \cdot \theta_2, \quad -1 = \frac{dy'_1}{da} \theta_1 + \frac{dy'_2}{da} \cdot \theta_2$$

d'où l'on tire

$$\theta_1 = \frac{y'_2}{y'_1 \cdot \frac{dy'_2}{da} - y'_2 \cdot \frac{dy'_1}{da}}, \quad \theta_2 = \frac{y'_1}{y'_2 \cdot \frac{dy'_1}{da} - y'_1 \cdot \frac{dy'_2}{da}}.$$

Or des deux équations

$$\frac{d^2 y'_1}{da^2} + \frac{s'_1}{s'_2} \cdot \frac{dy'_1}{da} + \frac{s'}{s'_2} \cdot y'_1 = 0$$

$$\frac{d^2 y'_2}{da^2} + \frac{s'_1}{s'_2} \cdot \frac{dy'_2}{da} + \frac{s'}{s'_2} \cdot y'_2 = 0,$$

on tirera

$$y'_2 \cdot \frac{d^2 y'_1}{da^2} - y'_1 \cdot \frac{d^2 y'_2}{da^2} + \frac{s'_1}{s'_2} \left(y'_2 \cdot \frac{dy'_1}{da} - y'_1 \cdot \frac{dy'_2}{da} \right) = 0;$$

donc

$$y'_2 \cdot \frac{dy'_1}{da} - y'_1 \cdot \frac{dy'_2}{da} = e^{-\int \frac{s'_1}{s'_2} da};$$

par conséquent:

$$\theta_1 = - y'_2 \cdot e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da}; \; \theta_2 = y'_1 \cdot e^{\int \frac{s'_1}{s'_2} da}.$$

On a de même

$$\chi = vy + s_2 t \cdot \frac{dy}{dx};$$

or $\quad v = s_1 t - \frac{d(s_2 t)}{dx} = \frac{s'_1}{x-a} + \frac{s'_2}{(x-a)^2} + R_1 - \frac{dR_2}{dx}$

et $\quad s_2 . t = \frac{s'_2}{x-a} + R_2$, donc

$$\chi = \frac{s'_1 \cdot y + s'_2 \cdot \frac{dy}{dx}}{x-a} + \frac{s'_2 y}{(x-a)^2} + \left(R_1 - \frac{dR_2}{dx} \right) y + R_2 \cdot \frac{dy}{dx}.$$

L'équation (6) deviendra donc dans ce cas

$$\int\frac{ydx}{x-a}=-y'_1\cdot y_1\cdot\int\frac{da}{x_1-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2-y'_1\cdot\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\int\frac{da}{x_1-a}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}y'_2$$

$$+y'_1\cdot y_0\cdot\int\frac{da}{x_0-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2-y'_1\cdot\frac{dy_0}{dx_0}\cdot\int\frac{da}{x_0-a}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2$$

$$+y'_2\cdot y_1\cdot\int\frac{da}{x_1-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1+y'_2\cdot\frac{dy_1}{dx_1}\cdot\int\frac{da}{x_1-a}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1$$

$$-y'_2\cdot y_0\cdot\int\frac{da}{x_0-a}\cdot\frac{s'_1}{s'_2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1-y'_2\cdot\frac{dy_0}{dx_0}\cdot\int\frac{da}{x_0-a}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1$$

$$-y'_1\cdot y_1\cdot\int\frac{da}{(x_1-a)^2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2-y'_1\cdot y_0\int\frac{da}{(x_0-a)^2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2$$

$$+y'_2\cdot y_1\cdot\int\frac{da}{(x_0-a)^2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1-y'_2\cdot y_0\int\frac{da}{(x_0-a)^2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1$$

$$-y'_1\cdot\iint\frac{y'_2}{s'_2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot\varrho ydx\,.\,da+y'_2\cdot\iint\frac{y'_1}{s'_2}\cdot e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot\varrho ydx\,.\,da$$

$$-y'_1y_1\int\frac{da}{s'_2}\left(R'_1-\frac{dR'_2}{dx_1}\right)e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2+y'_1\cdot y_0\cdot\int\frac{da}{s'_2}\left(R^0_1-\frac{dR^0_2}{dx_0}\right).e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2$$

$$+y'_2\cdot y_1\int\frac{da}{s'_2}\left(R'_1-\frac{dR'_2}{dx_1}\right)e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1-y'_2\cdot y_0\cdot\int\frac{da}{s'_2}\left(R^0_1-\frac{dR^0_2}{dx_0}\right).e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1$$

$$-y'_1\cdot\frac{dy_1}{dx_1}\int\frac{da}{s'_2}.R'_2.e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2+y'_1\cdot\frac{dy_0}{dx_0}\cdot\int\frac{da}{s'_2}R^0_2.e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_2$$

$$+y'_2\cdot\frac{dy_1}{dx_1}\int\frac{da}{s'_2}.R'_2.e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1-y'_2\cdot\frac{dy_0}{dx_0}\cdot\int\frac{da}{s'_2}R^0_2.e^{\int\frac{s'_1}{s'_2}da}\cdot y'_1$$

ou bien en faisant

$$\chi=\left[\left(s_1-\frac{ds_2}{dx}\right)y+s_2\cdot\frac{dy}{dx}\right]\cdot\frac{1}{x-a}+\frac{ys_2}{(x-a)^2}=\frac{p}{x-a}+\frac{q}{(x-a)^2}$$

et $\chi'=\frac{p_1}{x_1-a}-\frac{p_0}{x_0-a}+\frac{q_1}{(x_1-a)^2}-\frac{q_0}{(x_0-a)^2},$

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{ydx}{x-a}&=y'_1\iint^{\theta_1}\frac{}{s_2}\varrho yda.dx+y'_2\iint^{\theta_2}\frac{}{s_2}\varrho yda\,.\,dx\\&+y'_1\cdot p_1\int^{\theta_1}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{x_1-a}-y'_1\cdot p_0\cdot\int^{\theta_1}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{x_0-a}\\&+y'_2\cdot p_1\int^{\theta_2}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{x_1-a}-y'_1\cdot p_0\cdot\int^{\theta_2}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{x_0-a}\\&+y'_1\cdot q_1\int^{\theta_1}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{(x_1-a)^2}-y'_1\cdot q_0\cdot\int^{\theta_1}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{(x_0-a)^2}\\&+y'_2\cdot q_1\int^{\theta_2}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{(x_1-a)^2}-y'_2\cdot q_0\cdot\int^{\theta_2}\frac{}{s_2}\cdot\frac{da}{(x_0-a)^2}\end{aligned}\right\}\dots\dots\dots\;(8)$$

Si l'on suppose $s_1=0$, $s_2=0$ pour $x=x_1$ et $x=x_0$, on aura la formule:

$$\int\frac{ydx}{x-a}=c\left(y'_1\iint\frac{y'_2}{s_2}\varrho yda\,.dx-y'_2\cdot\iint\frac{y'_1}{s_2}\varrho yda\,.\,dx\right)\;.\;.\;.\;.\;(9)$$

Dans la formule (8) on peut faire $y=\sqrt[n]{(p+\sqrt{(p^2+q^n)})}+\dfrac{q}{\sqrt[n]{[p-\sqrt{(p^2+q^n)}]}}$.

Soit $z=\displaystyle\int\left(\frac{\alpha_1}{x-a}+\frac{\alpha_2}{(x-a)^2}+\frac{\Gamma 3\,.\,\alpha_3}{(x-a)^3}+\frac{\Gamma 4\,.\,\alpha_4}{(x-a)^4}+\dots+\frac{\Gamma m\,.\,\alpha_m}{(x-a)^m}\right)ydx$

α_1, $\alpha_2\dots\alpha_m$ étant des fonctions de a, et cherchons s'il est possible de faire en sorte que z satisfasse à l'équation

$$\beta z+\gamma\cdot\frac{dz}{da}=\int\varrho ydx+ry+v_1\cdot\frac{dy}{dx}+\dots+v_{m-1}\cdot\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}+\frac{s_m}{x-a}\cdot\frac{d^my}{dx^m}.$$

En différentiant l'expression de z par rapport à a, on aura

$$\frac{dz}{da}=\int\left\{\frac{\frac{d\alpha_1}{da}}{x-a}+\frac{\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}}{(x-a)^2}+\frac{\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)\Gamma 3}{(x-a)^3}+\frac{\left(\alpha_3+\frac{d\alpha_4}{da}\right)\Gamma 4}{(x-a)^4}+\dots\right\}ydx;$$

donc en substituant:

$$\int rydx=\chi,$$

$$\text{où}\quad -r=\varrho-\frac{\beta\alpha_1+\gamma\frac{d\alpha_1}{da}}{x-a}-\frac{\beta\alpha_2+\gamma\left(\alpha_1+\frac{d\alpha_2}{da}\right)}{(x-a)^2}-\frac{\left[\beta\alpha_3+\gamma\left(\alpha_2+\frac{d\alpha_3}{da}\right)\right]\Gamma 3}{(x-a)^3}-\text{etc}.$$

$$\dots-\frac{\left[\beta\alpha_m+\gamma\left(\alpha_{m-1}+\frac{d\alpha_m}{da}\right)\right]\Gamma m}{(x-a)^m}-\frac{\gamma\alpha_m\Gamma(m+1)}{(x-a)^{m+1}};$$

or on a vu que

$$-r=\varrho+\frac{s'}{x-a}+\frac{s'_1}{(x-a)^2}+\frac{s'_2\Gamma 3}{(x-a)^3}+\dots+\frac{s'_m\Gamma(m+1)}{(x-a)^{m+1}}.$$

On a donc les équations suivantes:

$$s' + \beta\alpha_1 + \gamma \cdot \frac{d\alpha_1}{da} = 0$$

$$s'_1 + \beta\alpha_2 + \gamma\left(\alpha_1 + \frac{d\alpha_2}{da}\right) = 0$$

$$s'_2 + \beta\alpha_3 + \gamma\left(\alpha_2 + \frac{d\alpha_3}{da}\right) = 0$$

$$s'_3 + \beta\alpha_4 + \gamma\left(\alpha_3 + \frac{d\alpha_4}{da}\right) = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s'_{m-1} + \beta\alpha_m + \gamma\left(\alpha_{m-1} + \frac{d\alpha_m}{da}\right) = 0$$

$$s'_m + \gamma \cdot \alpha_m = 0,$$

donc

$$\alpha_n = -\frac{s'_n}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma} \cdot \alpha_{n+1} - \frac{d\alpha_{n+1}}{da},$$

ou bien

$$\alpha_n = \delta_n + \varepsilon \cdot \alpha_{n+1} - \frac{d\alpha_{n+1}}{da};$$

en faisant pour abréger $-\frac{s'_n}{\gamma} = \delta_n$ et $-\frac{\beta}{\gamma} = \varepsilon$.

De là on tire

$$\alpha_{n+1} = \delta_{n+1} + \varepsilon \cdot \alpha_{n+2} - \frac{d\alpha_{n+2}}{da};$$

donc

$$\alpha_n = \delta_n + \varepsilon\delta_{n+1} + \left(\varepsilon^2 - \frac{d\varepsilon}{da}\right)\alpha_{n+2} - 2\varepsilon \cdot \frac{d\alpha_{n+2}}{da} - \frac{d\delta_{n+1}}{da} + \frac{d^2\alpha_{n+2}}{da^2}.$$

Comme on a $m+1$ équations et $m+2$ indéterminées, on peut faire ε constant; alors on a:

$$\alpha_n = \delta_n + \varepsilon\delta_{n+1} - \frac{d\delta_{n+1}}{da} + \varepsilon^2 \cdot \alpha_{n+2} - 2\varepsilon \cdot \frac{d\alpha_{n+2}}{da} + \frac{d^2\alpha_{n+2}}{da^2}.$$

Il est clair que α_n est de la forme

$$\begin{aligned}\alpha_n = \delta_n &+ \varepsilon \cdot \delta_{n+1} - \frac{d\delta_{n+1}}{da}\\ &+ \varepsilon^2 \cdot \delta_{n+2} - 2\varepsilon \cdot \frac{d\delta_{n+2}}{da} + \frac{d^2\delta_{n+2}}{da^2}\\ &+ \varepsilon^3 \cdot \delta_{n+3} - 3\varepsilon^2 \cdot \frac{d\delta_{n+3}}{da} + 3\varepsilon \frac{d^2\delta_{n+3}}{da^2} - \frac{d^3\delta_{n+3}}{da^3}\\ &+ \text{etc.}\end{aligned}$$

En faisant $n=0$, on aura

$$0=\delta+\varepsilon\delta_1-\frac{d\delta_1}{da}$$

$$+\varepsilon^2\delta_2-2\varepsilon.\frac{d\delta_2}{da}+\frac{d^2\delta_2}{da^2}$$

$$+\varepsilon^3\delta_3-3\varepsilon^2.\frac{d\delta_3}{da}+3\varepsilon\frac{d^2\delta_3}{da^2}-\frac{d^3\delta_3}{da^3}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$+\varepsilon^m\delta_m-m\varepsilon^{m-1}.\frac{d\delta_m}{da}+\frac{m(m-1)}{2}\varepsilon^{m-2}.\frac{d^2\delta_m}{da^2}-\ldots\pm\frac{d^m\delta_m}{da^m}$$

Cette équation détermine la fonction γ.

En substituant au lieu de δ_n sa valeur $-\frac{s'_n}{\gamma}=s'_n.\omega$, on aura une équation linéaire en ω.

Ayant ainsi trouvé toutes les inconnues, on a

$$\gamma\left(\varepsilon z-\frac{dz}{da}\right)=\chi+\int\varrho y dx,$$

d'ou l'on tirera la valeur de z.

XI.

Sur la comparaison des fonctions transcendantes.

Soit y une fonction algébrique quelconque déterminée par l'équation

$$0 = \alpha + \alpha_1 . y + \alpha_2 . y^2 + \ldots + \alpha_m . y^m \quad \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2 \ldots$ étant des fonctions entières de x.

Soit de même

$$0 = q + q_1 . y + q_2 . y^2 + q_3 . y^3 + \cdots + q_{m-1} . y^{m-1} \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

q, q_1, q_2 etc. étant des fonctions entières de x et d'un nombre quelconque d'autres variables, savoir les coefficiens des diverses puissances de x dans les fonctions q, q_1, q_2, etc. Soient $a, a_1, a_2, a_3 \ldots$ ces coefficiens. Cela posé, on peut tirer des deux équations (1) et (2) la fonction y exprimée rationnellement en x et en a, a_1, a_2 etc. Soit r cette fonction, on aura

$$y = r \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

En substituant cette valeur de y dans l'une des équations (1) et (2), on aura une équation

$$s = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

s étant une fonction entière de $x, a, a_1, a_2 \ldots$

Cette équation donne x en fonction des quantités a, a_1, a_2 etc. En différentiant par rapport à ces quantités on aura

$$\left(\frac{ds}{dx}\right) . dx + d's = 0,$$

la caractéristique d' étant uniquement relative aux quantités a, a_1, a_2 etc.

De là on tire

$$dx = -\frac{d's}{\left(\frac{ds}{dx}\right)};$$

et en multipliant par $f(y, x)$, où f désigne une fonction rationnelle de y et x,

$$f(y,x).dx = -\frac{f(r,x)}{\left(\frac{ds}{dx}\right)}.d's \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

où on a mis r au lieu de y dans le second membre.

On aura donc, en développant la différentielle $d's$, une équation de cette forme:

$$f(y,x).dx = \varphi(x)\; da + \varphi_1(x).da_1 + \varphi_2(x).da_2 + \cdots \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

$\varphi(x)$, $\varphi_1(x)$ etc. étant des fonctions rationnelles de x, a, a_1, a_2 etc.

Cela posé, soient x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ les racines de l'équation $s=0$; on aura, en substituant ces valeurs au lieu de x dans l'équation (6), n équations semblables qui, ajoutées ensemble donneront celle-ci:

$$f(y_1, x_1)dx_1 + f(y_2, x_2)dx_2 + \ldots + f(y_n, x_n).dx_n$$
$$= \begin{cases} \quad (\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \ldots + \varphi(x_n)).da \\ + (\varphi_1(x_1) + \varphi_1(x_2) + \varphi_1(x_3) + \ldots + \varphi_1(x_n)).da_1 \\ + (\varphi_2(x_1) + \varphi_2(x_2) + \varphi_2(x_3) + \ldots + \varphi_2(x_n)).da_2 \\ + \text{etc.} \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$f(y_1, x_1).dx_1 + f(y_2, x_2).dx_2 + \ldots + f(y_n, x_n)dx_n = R.da + R_1.da_1 + R_2.da_2 + \ldots$$

où R, R_1, $R_2 \ldots$ sont, comme il est aisé de voir, des fonctions rationnelles de a, a_1, $a_2 \ldots$

Maintenant le premier membre de cette équation est une différentielle complète; le second membre est donc aussi immédiatement intégrable. En désignant donc

$$\int(R.da + R_1da_1 + R_2da_2 + \ldots)$$

par ϱ, il est clair que ϱ est une fonction algébrique et logarithmique de a, a_1, $a_2 \ldots$

On aura donc en intégrant et désignant

$$\int f(y, x).dx \text{ par } \psi(x),$$

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \ldots + \psi(x_n) = C + \varrho \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

Cette équation exprime, comme on le voit, une propriété de la fonction $\psi(x)$ qui en général est transcendante.

Les quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ étant des fonctions des variables indépendantes a, a_1, $a_2 \ldots$, il est clair qu'on peut, en supposant que le nombre de ces variables est μ, regarder un nombre μ des quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ comme indéterminées, et les $n-\mu$ autres comme des fonctions de celles-ci. On peut trouver ces fonctions de la manière suivante.

Soient x_1, x_2, $x_3 \dots x_\mu$ donnés, et faisons

$$p = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \dots (x - x_\mu),$$

on aura, en divisant l'équation $s = 0$ par p, une équation

$$s' = 0$$

dont les racines sont les quantités $x_{\mu+1}$, $x_{\mu+2} \dots x_n$.

Dans cette équation les coefficiens contiendront les quantités a, a_1, $a_2 \dots a_{\mu-1}$; il faut donc exprimer ces quantités au moyen des quantités x_1, x_2, $x_3 \dots x_n$. Cela peut se faire de la manière la plus facile en mettant dans l'équation (2) au lieu de x successivement x_1, x_2, $x_3 \dots x_\mu$. En effet, on obtiendra alors μ équations linéaires en a, a_1, $a_2 \dots a_{\mu-1}$ qui serviront à les déterminer. En substituant ensuite ces valeurs dans l'équation $s' = 0$, on aura une équation du degré $n - \mu$, dont tous les coefficiens sont des fonctions des quantités x_1, x_2, $x_3 \dots x_\mu$; par cette équation on peut donc déterminer les fonctions $x_{\mu+1}$, $x_{\mu+2} \dots x_n$.

Il n'est pas difficile de se convaincre que, quel que soit le nombre μ, on peut toujours faire en sorte que $n - \mu$ devienne indépendant de μ. Au moyen de l'équation (7) on peut donc exprimer la somme d'un nombre quelconque de fonctions de la forme ψx par un nombre déterminé de fonctions de la même forme, savoir

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_\mu) = C + \varrho - (\psi(z_1) + \psi(z_2) + \psi(z_3) + \dots + \psi(z_\nu))$$

en faisant $\quad x_{\mu+k} = z_k$ et $n - \mu = \nu$.

On peut déterminer la fonction en donnant à chacune des quantités x_1, $x_2 \dots x_\mu$ une valeur particulière. Alors la formule devient:

$$\left.\begin{aligned} \psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_\mu) = \varrho + \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \dots + \psi(x'_\mu) \\ - \varrho' - \psi(z_1) - \psi(z_2) - \dots - \psi(z_\nu) \\ + \psi(z'_1) + \psi(z'_2) + \dots + \psi(z'_\nu) \end{aligned}\right\} \dots (8)$$

en désignant par z'_k la valeur de z_k lorsqu'on donne aux variables x_1, $x_2 \dots x_\mu$ les valeurs x'_1, $x'_2 \dots x'_\mu$.

Dans le cas où μ est plus grand que ν on peut trouver une formule beaucoup plus simple. En effet supposons qu'on ait entre les quantités x_1, $x_2 \dots x_\mu$ les relations suivantes

$$c_1 = z_1,\ c_2 = z_2,\ c_3 = z_3 \dots c_\nu = z_\nu \quad \dots\dots\dots\dots (9)$$

on aura aussi

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots \psi(x_\mu) = c + \varrho;$$

ou bien

$$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\dots+\psi(x_\mu)=\varrho-\varrho'+\psi(x'_1)+\psi(x'_2)+\dots+\psi(x'_\mu)$$

Parmi les quantités $x_1, x_2 \dots x_\mu$, $\mu-\nu$ sont des variables indépendantes, les autres sont des fonctions de celles-ci, déterminées par les équations (9). On peut donc faire

$$\psi(x'_{\nu+1})=0,\ \psi(x'_{\nu+2})=0 \dots \psi(x'_\mu)=0,\ \dots\dots\dots \quad (10)$$

et alors on aura

$$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\dots+\psi(x_\mu)=\varrho-\varrho'+\psi(x'_1)+\psi(x'_2)+\dots+\psi(x'_\nu)\ . \quad (11)$$

Les quantités $x_1, x_2, x_3 \dots x_\mu$ sont liées entre elles par les équations (9), mais comme ces équations contiennent $\mu+\nu$ indéterminées, savoir

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \dots x_\mu,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \dots c_\nu,$$

il est clair qu'on peut regarder les μ quantités $x_1, x_2, x_3 \dots x_\mu$ comme variables. Les quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \dots x'_\nu$ se déterminent par les équations (10). Pour cela soit

$$z_k=\varphi_k(x_1,\ x_2,\ x_3 \dots x_\mu),$$

on aura les équations

$$c_1=\varphi_1(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\mu),\ c_2=\varphi_2(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\mu) \dots c_\nu=\varphi_\nu(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\mu)$$
$$c_1=\varphi_1(x_1,\ x_2 \dots x_\mu),\ c_2=\varphi_2(x_1,\ x_2 \dots x_\mu) \dots c_\nu=\varphi_\nu(x_1,\ x_2 \dots x_\mu)$$

Or les équations (10) donnent

$$x'_{\nu+1}=\beta_1,\ x'_{\nu+2}=\beta_2 \dots x'_\mu=\beta_{\mu-\nu};$$

en substituant donc ces valeurs, on aura les ν équations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(x_1,\ x_2 \dots x_\mu)&=\varphi_1(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \dots \beta_{\mu-\nu})\\
\varphi_2(x_1,\ x_2 \dots x_\mu)&=\varphi_2(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \dots \beta_{\mu-\nu})\\
\varphi_3(x_1,\ x_2 \dots x_\mu)&=\varphi_3(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \dots \beta_{\mu-\nu})\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\varphi_\nu(x_1,\ x_2 \dots x_\mu)&=\varphi_\nu(x'_1,\ x'_2 \dots x'_\nu,\ \beta_1,\ \beta_2 \dots \beta_{\mu-\nu})
\end{aligned}\right\} \dots \quad (12)$$

qui donnent les valeurs des quantités $x'_1, x'_2, x'_3 \dots x'_\nu$.

Ces équations sont très compliquées; il est plus simple d'employer la méthode suivante.

En supposant dans l'équation (7) $n=\mu+\nu$ et $x_{\mu+1}=c_1$, $x_{\mu+2}=c_2 \dots x_n=c_\nu$, cette équation deviendra

$$\psi(x_1)+\psi(x_2)+\dots+\psi(x_\mu)=C+\varrho,$$

où les quantités $x_1, x_2 \dots x_\mu$ sont liées entre elles par les équations suivantes;

$$\theta(x_1)=0,\ \theta(x_2)=0,\ \theta(x_3)=0 \dots \theta(x_\mu)=0\ \dots\dots\dots \quad (13)$$
$$\theta(c_1)=0,\ \theta(c_2)=0,\ \theta(c_3)=0 \dots \theta(c_\nu)=0\ \dots\dots\dots \quad (14)$$

Cela posé, si l'on fait $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2 \ldots x_\nu = x'_\nu$ et $x'_{\nu+1} = \beta_1$, $x'_{\nu+2} = \beta_2 \ldots x'_\mu = \beta_{\mu-\nu}$, on aura

$$C = -\varrho' + \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \ldots + \psi(x'_\nu)$$

et $\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_\mu) = \varrho - \varrho' + \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \ldots + \psi(x'_\nu)$,

où x'_1, $x'_2 \ldots x'_\nu$ sont déterminés par les équations:

$$\theta(x'_1) = 0,\ \theta(x'_2) = 0,\ \theta(x'_3) = 0 \ldots \theta(x'_\nu) = 0 \ \ldots\ldots \ (15)$$

$$\theta(\beta_1) = 0,\ \theta(\beta_2) = 0,\ \theta(\beta_3) = 0 \ldots \theta(\beta_{\mu-\nu}) = 0 \ \ldots\ldots \ (16)$$

$$\theta(c_1) = 0,\ \theta(c_2) = 0,\ \theta(c_3) = 0 \ldots \theta(c_\nu) = 0 \ \ldots\ldots \ (17)$$

Désignons maintenant la fonction s par $\theta_1(x)$, il est clair qu'on aura aussi

$$\theta_1(x'_k) = 0,\ \theta_1(\beta_k) = 0,\ \theta_1(c_k) = 0,$$

pourvu que a, a_1, $a_2 \ldots a_{\mu-1}$ soient déterminés par les équations (16) et (17).

On aura donc

$$\theta_1(x) = (x - x'_1)(x - x'_2)(x - x'_3) \ldots (x - x'_\nu)$$
$$\times (x - \beta_1)(x - \beta_2)(x - \beta_3) \ldots (x - \beta_{\mu-\nu})$$
$$\times (x - c_1)(x - c_2)(x - c_3) \ldots (x - c_\nu)$$

En divisant l'équation $\theta_1(x) = 0$ par le produit

$$(x - \beta_1)(x - \beta_2) \ldots (x - \beta_{\mu-\nu})(x - c_1)(x - c_2) \ldots (x - c_\nu),$$

on aura une équation du degré ν dont les différentes racines sont les quantités x'_1, $x'_2 \ldots x'_\nu$.

Dans ce qui précède il faut remarquer que si plusieurs des quantités β_1, β_2 etc. sont égales, p. ex. si

$$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_k,$$

on aura, au lieu des équations

$$\theta_1(\beta_1) = 0,\ \theta_1(\beta_2) = 0, \ldots \theta_1(\beta_k) = 0,$$

celles-ci

$$\theta_1(\beta_1) = 0,\ \theta'_1(\beta_1) = 0,\ \theta''_1(\beta_1) = 0 \ldots\ \theta_1^{(k-1)}(\beta_1) = 0.$$

La même chose a lieu, si quelques-unes des quantités x_1, $x_2 \ldots x_\mu$ sont égales entre elles.

Ayant ainsi déterminé les quantités x'_1, x'_2, $x'_3 \ldots x'_\nu$ en fonctions de c_1, c_2, $c_3 \ldots c_\nu$, il est clair qu'on peut regarder ces quantités comme des variables et déterminées par les équations (15) et (14). Les quantités x_1, $x_2 \ldots x_\mu$ deviennent alors indépendantes et x'_1, $x'_2 \ldots x'_\mu$ des fonctions de ces variables.

Application de la théorie précédente.

Je vais maintenant éclaircir la théorie précédente par plusieurs exemples.

Soit $0 = \alpha + \alpha_1 y$.

Dans ce cas on a $m = 1$ et par conséquent l'équation (2) devient

$$0 = q = a + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + x^n = s, \quad \dots\dots (18)$$

d'où l'on tire en différentiant

$$y dx = \frac{da + x da_1 + x^2 da_2 + \dots + x^{n-1} . da_{n-1}}{\left(\frac{ds}{dx}\right)} \frac{\alpha}{\alpha_1} \quad \dots\dots\dots (19)$$

En désignant donc $\int y dx$ par $\psi(x)$, l'équation (7) devient

$$\left.\begin{aligned} &\psi(x_1) + \psi(x_2) + \psi(x_3) + \dots + \psi(x_n) = \varrho, \\ &\text{où } -d\varrho = \left\{\frac{y_1}{\left(\frac{ds_1}{dx_1}\right)} + \frac{y_2}{\left(\frac{ds_2}{dx_2}\right)} + \frac{y_3}{\left(\frac{ds_3}{dx_3}\right)} + \dots + \frac{y_n}{\left(\frac{ds_n}{dx_n}\right)}\right\} . da \\ &\qquad + \left\{\frac{x_1 y_1}{\left(\frac{ds_1}{dx_1}\right)} + \frac{x_2 y_2}{\left(\frac{ds_2}{dx_2}\right)} + \dots\dots + \frac{x_n y_n}{\left(\frac{ds_n}{dx_n}\right)}\right\} . da_1 \\ &\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\qquad + \left\{\frac{x_1^{n-1} y_1}{\left(\frac{ds_1}{dx_1}\right)} + \frac{x_2^{n-1} y_2}{\left(\frac{ds_2}{dx_2}\right)} + \dots\dots + \frac{x_n^{n-1} y_n}{\left(\frac{ds_n}{dx_n}\right)}\right\} . da_{n-1} \end{aligned}\right\} \dots (20)$$

Comme le nombre des quantités $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ et celui de celles-ci $a, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$ est le même, toutes les quantités $x_1, x_2 \dots x_n$ sont des variables indépendantes.

De l'équation que nous venons de trouver, on peut déduire deux formules, qui seront d'une grande utilité dans ces recherches.

Soit d'abord $y = x^m$, on aura

$$\int y dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} = \psi(x).$$

La formule (20) deviendra donc

$$\frac{1}{m+1}(x_1^{m+1} + x_2^{m+1} + \dots + x_n^{m+1}) = -\int (P_m . da + P_{m+1} . da_1 + P_{m+2} . da_2 + \dots + P_{m+n-1} . da_{n-1}) . (21)$$

en faisant pour abréger

$$P_m = \frac{x_1^m}{\left(\frac{ds_1}{dx_1}\right)} + \frac{x_2^m}{\left(\frac{ds_2}{dx_2}\right)} + \frac{x_3^m}{\left(\frac{ds_3}{dx_3}\right)} + \dots + \frac{x_n^m}{\left(\frac{ds_n}{dx_n}\right)} \quad \dots\dots (22)$$

Maintenant le premier membre de l'équation (21) peut s'exprimer par une fonction rationnelle et entière des quantités $a, a_1, a_2 \dots a_{n-1}$. En désignant donc cette fonction par $\frac{1}{m+1} Q_{m+1}$, il est clair qu'on aura

$$P_{m+k} = -\frac{1}{m+1}\left(\frac{dQ_{m+1}}{da_k}\right).$$

En faisant $m=0$ on aura $P_k = -\left(\frac{dQ_1}{da_k}\right)$.

Or $$Q_1 = x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = -a_{n-1}$$

La fonction Q_1 ne contient donc que la variable a_{n-1}. On aura par conséquent $P_0=0,\ P_1=0,\ P_2=0\ldots P_{n-2}=0,\ P_{n-1}=1.$

Soit maintenant $y=\frac{1}{(x-\alpha)^m}$, on aura

$$\int y dx = -\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{(x-\alpha)^{m-1}} = \psi(x);$$

donc $$\frac{1}{m-1}\cdot\left(\frac{1}{(x_1-\alpha)^{m-1}}+\frac{1}{(x_2-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{(x_n-\alpha)^{m-1}}\right)$$
$$=\int(P_m^{(0)}.da+P_m^{(1)}.da_1+P_m^{(2)}.da_2+\ldots+P_m^{(n-1)}da_{n-1}),$$
en faisant pour abréger

$$P_m^{(k)} = \frac{x^k_1}{(x_1-\alpha)^m\cdot\frac{ds_1}{dx_1}} + \frac{x^k_2}{(x_2-\alpha)^m\cdot\frac{ds_2}{dx_2}} + \ldots + \frac{x^k_n}{(x_n-\alpha)^m\cdot\frac{ds_n}{dx_n}}.$$

Si l'on fait

$$\frac{1}{(x_1-\alpha)^{m-1}}+\frac{1}{(x_2-\alpha)^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{(x_n-\alpha)^{m-1}} = Q'_{m-1},$$

on aura

$$P_m^{(k)} = \frac{1}{m-1}\cdot\left(\frac{dQ'_{m-1}}{da_k}\right).$$

Si $m=1$, cette équation devient illusoire; or dans ce cas on a

$$\int y dx = \log(x-\alpha),$$

donc si l'on fait

$$t=(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)\ldots(x_n-\alpha)=(-1)^n(a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots a_{n-1}\alpha^{n-1}+\alpha^n),$$
on aura

$$P_1^{(k)} = -\left(\frac{dt}{da_k}\right)\cdot\frac{1}{t} = \frac{\alpha^k}{a+a_1\alpha+a_2\alpha^2+\ldots+a_{n-1}.\alpha^{n-1}+\alpha^n}.$$

Dans l'équation (20) la fonction ϱ est en général une fonction logarithmique et algébrique, mais on peut toujours établir de telles relations entre les quantités x_1, x_2 etc. que cette quantité devienne égale à zéro.

En effet soit

$$0=\delta+\delta_1 x+\delta_2 x^2+\ldots+\alpha_1(a+a_1x+a_2x^2+\ldots a_{\mu-1}x^{\mu-1}+x^\mu)=s;$$
on aura en différentiant

$$0=\left(\frac{ds}{dx}\right)dx+\alpha_1(da+x.da_1+x^2.da_2+\ldots x^{\mu-1}.da_{\mu-1}),$$

donc

$$ydx = \frac{\alpha.(da + x.da_1 + x^2.da_2 + \ldots + x^{\mu-1}.da_{\mu-1})}{\left(\frac{ds}{dx}\right)},$$

$$\text{et}\quad \psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_n) = \varrho,$$

ϱ étant en général une fonction entière qui s'évanouit lorsque le degré de a est moindre que celui de a_1. Dans ce cas on a donc

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) \ldots + \psi(x_n) = C. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

Les quantités x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ sont liées entre elles par les équations

$$a + a_1 x_1 + a_2 x^2_1 + \ldots + a_{\mu-1} x_1^{\mu-1} + x_1^{\mu} = \frac{f(x_1)}{\varphi(x_1)}$$

$$a + a_1 x_2 + a_2 x^2_2 + \ldots + a_{\mu-1} x_2^{\mu-1} + x_2^{\mu} = \frac{f(x_2)}{\varphi(x_2)}$$

$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$

$$a + a_1 x_n + a_2 x^2_n + \ldots + a_{\mu-1} x_n^{\mu-1} + x_n^{\mu} = \frac{f(x_n)}{\varphi(x_n)}$$

où l'on a fait pour abréger

$$a_1 = \varphi(x) \text{ et } -(\delta + \delta_1 x + \delta_2 x^2 + \ldots + \delta_{n-1} x^{n-1}) = f(x).$$

En faisant dans l'équation (23) $x_1 = x'_1$, $x_2 = x'_2$ etc. on aura

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_n) = \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \ldots + \psi(x'_n).$$

Dans cette équation on peut regarder δ, δ_1 etc. comme des variables; par conséquent on peut regarder $x_1, x_2, x_3 \ldots$ comme des variables indépendantes, et faire en sorte que $\psi(x'_n) = 0$, $\psi(x'_{n-1}) = 0 \ldots \psi(x'_{\mu+1}) = 0$.

On aura donc la formule

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_n) = \psi(x'_1) + \psi(x'_2) + \ldots + \psi(x'_\mu) \;. \quad (24).$$

Soit par exemple $a = 1$, $a_1 = x$, on aura $\psi(x) = \int \frac{dx}{x} = \log x$.

$$0 = \delta + ax + a_1 x^2 + \ldots + a_{\mu-1} x^{\mu} + x^{\mu+1}$$

$$\delta = (-1)^{\mu+1}. x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{\mu+1}$$

$$\delta = (-1)^{\mu+1}. x'_1 . x'_2 . x'_3 \ldots x'_{\mu+1};$$

donc si l'on fait $x'_2 = x'_3 = \ldots = x'_{\mu+1} = 1$, on aura

$$x'_1 = x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{\mu+1};$$

par conséquent

$$\log(x_1) + \log(x_2) + \ldots + \log(x_{\mu+1}) = \log(x_1 . x_2 . x_3 \ldots x_{\mu+1}),$$

comme on sait.

Soit maintenant $a = 1$, $a_1 = 1 + x^2$, on aura

$$\psi(x) = \text{arc. tang}\,(x),$$

$$0=\delta+\delta_1 x_1+(1+x^2_1).(a+x_1),$$
$$0=\delta+\delta_1 x_2+(1+x^2_2).(a+x_2),$$
$$0=\delta+\delta_1 x_3+(1+x^2_3).(a+x_3),$$
$$\text{arc. tg.}\,(x_1)+\text{arc. tg.}\,(x_2)+\text{arc. tg.}\,(x_3)=C;$$
$$x_1.x_2.x_3=-\delta-a;\; x_1+x_2+x_3=-a;\; x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\delta_1+1;$$

donc
$$\left.\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3-x_1.x_2.x_3=\delta \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3-1=\delta_1 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (25)$$

Soit, pour déterminer C, $x_3=x'_2$, $x_2=-x'_2$, $x_1=x'_1$, on aura
$$C=\text{arc tg.}\,(x'_1),\; x'_1+x'_1(x'_2)^2=\delta,\; 1+(x'_2)^2=-\delta_1.$$

Des deux dernières équations on tire, en éliminant x'_2,
$$-\frac{\delta}{\delta_1}=x'_1;$$

or les équations (25.) donnent
$$-\frac{\delta}{\delta_1}=\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3};$$

donc en substituant on aura
$$\text{arc. tg.}\,(x_1)+\text{arc. tg.}\,(x_2)+\text{arc. tg.}\,(x_3)=\text{arc. tg.}\left(\frac{x_1+x_2+x_3-x_1x_2x_3}{1-x_1x_2-x_1x_3-x_2x_3}\right).$$

Pour trouver la valeur de $d\varrho$, il faut, selon ce qu'on a vu, exprimer en fonctions de a, a_1 $a_2\ldots$ des fonctions symétriques de x_1, $x_2\ldots x_n$ de la forme
$$\frac{f(x_1)}{\left(\frac{ds_1}{dx_1}\right)}+\frac{f(x_2)}{\left(\frac{ds_2}{dx_2}\right)}+\ldots+\frac{f(x_n)}{\left(\frac{ds_n}{dx_n}\right)};$$

mais comme cela est en général très laborieux par les méthodes ordinaires, je vais développer quelques formules qui sont d'une grande utilité dans ces recherches, et qu'on peut déduire de la théorie précédente.

Soit dans ce qui précède y une fonction rationnelle $f(x)$, on aura $m=1$, et par conséquent
$$0=q=a+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n=s=\varphi(x),$$

d'où l'on tirera en différentiant
$$fx.dx=-\frac{da+x.da_1+x_2da_2+\ldots+x^n.da_n}{\varphi'x}.fx$$

donc l'équation (20) deviendra
$$\int fx_1.dx_1+\int fx_2.dx_2+\int fx_3.dx_3+\ldots+\int fx_n.dx_n=\varrho$$

où
$$-d\rho = da\left(\frac{fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{fx_n}{\varphi' x_n}\right)$$
$$+ da_1\left(\frac{x_1 . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2 . fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{x_n . fx_n}{\varphi' x_n}\right)$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$+ da_n\left(\frac{x^n{}_1 . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x^n{}_2 . fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{x^n{}_n . fx_n}{\varphi' x_n}\right).$$

Cela posé, soit
$$\int fx . dx = \psi x + \Sigma A . \log(x - \delta),$$
on aura
$$\rho = \psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_n)$$
$$+ \Sigma A \log(x_1 - \delta)(x_2 - \delta)(x_3 - \delta)\dots(x_n - \delta).$$

La quantité $\psi(x_1) + \psi(x_2) + \dots + \psi(x_n)$ est une fonction symétrique de $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$; on peut donc exprimer cette fonction par une fonction rationnelle de $a, a_1, a_2 \dots a_n$. Soit p cette fonction. La quantité $(x_1 - \delta)(x_2 - \delta)$ $\dots (x_n - \delta)$ est la même chose que $(-1)^n . \frac{\varphi(\delta)}{a_n}$; on aura donc
$$\rho = p + \Sigma A(\log \varphi(\delta) - \log a_n),$$
d'où l'on tire
$$\frac{d\rho}{da_m} = \frac{dp}{da_m} + \Sigma A\left[\frac{1}{\varphi\delta} \cdot \left(\frac{d\varphi\delta}{da_m}\right) - \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{da_n}{da_m}\right)\right];$$
on aura aussi
$$\frac{d\rho}{da_m} = -\left(\frac{x_1{}^m . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2{}^m . fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{x_n{}^m . fx_n}{\varphi' x_n}\right);$$
donc
$$Q_m = \frac{x_1{}^m . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2{}^m . fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{x_n{}^m . fx_n}{\varphi' x_n}$$
$$= -\frac{dp}{da_m} - \Sigma A\left[\frac{1}{\varphi\delta} \cdot \left(\frac{d\varphi\delta}{da_m}\right) - \frac{1}{a_n} \cdot \left(\frac{da_n}{da_m}\right)\right];$$
or $\frac{d\varphi\delta}{da_n} = \delta^m$, donc
$$\frac{x_1{}^m . fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2{}^m . fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{x_n{}^m . fx_n}{\varphi' x_n} = -\frac{dp}{da_m} - \Sigma \frac{A . \delta^m}{\varphi\delta} + \Sigma \frac{A}{a_n}\left(\tfrac{1}{2} \pm \tfrac{1}{2}\right) \quad . \; . \; . \quad (26)$$
Le signe $+$ a lieu, si $m = n$, et le signe $-$, si $m < n$.

Si l'on fait $m = 0$, on aura
$$\frac{fx_1}{\varphi' x_1} + \frac{fx_2}{\varphi' x_2} + \dots + \frac{fx_n}{\varphi' x_n} = -\frac{dp}{da} - \Sigma \frac{A}{\varphi\delta} .$$

De l'équation (26) on tire aisément celle-ci

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F(x_1).fx_1}{\varphi' x_1}+\frac{F(x_2).fx_2}{\varphi' x_2}+\frac{F(x_3).fx_3}{\varphi' x_3}+\ldots+\frac{F(x_n).fx_n}{\varphi' x_n} \\ &=-\beta\left(\frac{dp}{da}\right)-\beta_1\left(\frac{dp}{da_1}\right)-\beta_2\left(\frac{dp}{da_2}\right)\ldots-\beta_n\left(\frac{dp}{da_n}\right) \\ &-\Sigma\frac{A.F(\delta)}{\varphi\delta}+\frac{\beta_n}{a_n}\Sigma(A), \end{aligned}\right\} \ldots (27)$$

où $F(x)=\beta+\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_n x^n$.

En faisant $fx=1$, on aura $\psi x=x$, donc

$$p=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_{n-1}}{a_n},\ A=0;$$

donc

$$\frac{F(x_1)}{\varphi' x_1}+\frac{F(x_2)}{\varphi' x_2}+\ldots+\frac{F(x_n)}{\varphi' x_n}=\frac{\beta_{n-1}}{a_n}-\frac{\beta_n . a_{n-1}}{(a_n)^2}.$$

Il suit de là que

$$\frac{x_1{}^m}{\varphi' x_1}+\frac{x_2{}^m}{\varphi' x_2}+\ldots+\frac{x_n{}^m}{\varphi' x_n}=0, \ldots\ldots\ldots\ldots (28)$$

si m est moindre que $n-1$;

que $$\frac{x_1{}^{n-1}}{\varphi' x_1}+\frac{x_2{}^{n-1}}{\varphi' x_2}+\ldots+\frac{x_n{}^{n-1}}{\varphi' x_n}=\frac{1}{a_n} \ldots\ldots\ldots\ldots (29)$$

et que $$\frac{x_1{}^n}{\varphi' x_1}+\frac{x_2{}^n}{\varphi' x_2}+\ldots+\frac{x_n{}^n}{\varphi' x_n}=-\frac{a_{n-1}}{(a_n)^2} \ldots\ldots\ldots (30)$$

Si l'on fait $fx=\frac{1}{x-\delta}$, on aura $p=0$, $A=1$, donc

$$\frac{F(x_1)}{(x_1-\delta)\varphi' x_1}+\frac{F(x_2)}{(x_2-\delta)\varphi' x_2}+\ldots+\frac{F(x_n)}{(x_n-\delta)\varphi' x_n}=\frac{\beta_n}{a_n}-\frac{F\delta}{\varphi\delta} \ldots (31)$$

De cette équation on déduira en différentiant m fois de suite par rapport à δ:

$$\frac{F(x_1)}{(x_1-\delta)^{m+1}.\varphi' x_1}+\frac{F(x_2)}{(x_2-\delta)^{m+1}.\varphi' x_2}+\ldots+\frac{F(x_n)}{(x_n-\delta)^{m+1}.\varphi' x_n}=-\frac{1}{\Gamma(m+1)}\cdot\frac{d^m\left(\frac{F\delta}{\varphi\delta}\right)}{(d\delta)^m} . (32)$$

ou bien en développant le second membre de cette équation

$$\left.\begin{aligned} &\frac{F(x_1)}{(x_1-\delta)^{m+1}.\varphi' x_1}+\frac{F(x_2)}{(x_2-\delta)^{m+1}.\varphi' x_2}+\ldots+\frac{F(x_n)}{(x_n-\delta)^{m+1}.\varphi' x_n}= \\ &-\frac{1}{\Gamma(m+1)}\left\{\frac{d^m\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{(d\delta)^m}.F\delta+m.\frac{d^{m-1}\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{(d\delta)^{m-1}}\cdot\frac{dF\delta}{d\delta}+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(n+1)}{1.2.3\ldots(m-n)}\cdot\frac{d^nF\delta}{(d\delta)^n}\cdot\frac{d^{m-n}\left(\frac{1}{\varphi\delta}\right)}{(d\delta)^{m-n}}.\right\} \end{aligned}\right\} (33)$$

Par exemple, si $m=1$, on aura

$$\frac{F(x_1)}{(x_1-\delta)^2.\varphi' x_1}+\frac{F(x_2)}{(x_2-\delta)^2.\varphi' x_2}+\ldots+\frac{F(x_n)}{(x_n-\delta)^2.\varphi' x_n}=-\frac{F'\delta}{\varphi\delta}+\frac{F\delta.\varphi'\delta}{(\varphi\delta)^2}.$$

XII.

Sur les fonctions génératrices et leurs déterminantes.

Soit $\varphi(x, y, z\ldots)$ une fonction quelconque de plusieurs variables $x, y, z\ldots$, on peut toujours trouver une fonction $f(u, v, p\ldots)$ telle que

$$\varphi(x, y, z\ldots) = \int e^{xu+yv+zq+\cdots}.f(u, v, p\ldots).du\,dv\,dp \;\ldots\ldots\; (1)$$

Dans cette équation j'appellerai φ la fonction génératrice de f et f la déterminante de φ, et je ferai usage des significations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x, y, z\ldots) &= fgf(u, v, p\ldots)\\ f(u, v, p\ldots) &= D\varphi(x, y, z\ldots)\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

Cela posé, considérons d'abord les fonctions d'une seule variable, et soit

$$\varphi x = \int e^{vx}.fv.dv \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3)$$

on aura

$$\left.\begin{aligned}\varphi x &= fg.fv\\ fv &= D\varphi x\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4)$$

Soit de même $\varphi_1 x = \int e^{xv}.f_1 v.dv,$

on aura $\varphi x + \varphi_1 x = \int e^{xv}(fv + f_1 v)dv;$

donc $D(\varphi x + \varphi_1 x) = fv + f_1 v;$

or $fv = D\varphi x,\; f_1 v = D\varphi_1 x,$

donc $D(\varphi x + \varphi_1 x) = D\varphi x + D\varphi_1 x.$

On aura en général:

$$D(\varphi x + \varphi_1 x + \varphi_2 x + \varphi_3 x + \ldots) = D\varphi x + D\varphi_1 x + D\varphi_2 x + D\varphi_3 x + \ldots \; (5)$$

donc aussi

$$fg(fv + f_1 v + f_2 v + \ldots) = fgfv + fgf_1 v + fgf_2 v + \ldots\ldots\; (6)$$

$$\left.\begin{aligned}D(a\varphi x) &= aD\varphi x\\ fg(afv) &= a.fgfv\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (7)$$

En mettant $x+\alpha$ au lieu de x, on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \int e^{xv}.e^{\alpha v}.fvdv$$

donc

$$\left.\begin{aligned}D\varphi(x+\alpha) &= e^{\alpha v}.D\varphi x\\ fg(e^{\alpha v}D\varphi x) &= \varphi(x+\alpha) = fg(e^{\alpha v}fv)\end{aligned}\right\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (8)$$

En différentiant l'équation (3) on aura:

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \int e^{xv}.vfvdv$$

donc

$$\left.\begin{aligned} D\left(\frac{d\varphi x}{dx}\right) &= vfv = vD\varphi x \\ fg(vfv) &= fg(vD\varphi x) = \frac{d\varphi x}{dx} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

De la même manière on aura en différentiant l'équation (3) n fois de suite:

$$\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = \int e^{vx}.v^n.fvdv$$

donc:

$$\left.\begin{aligned} D\left(\frac{d^n\varphi x}{dx^n}\right) &= v^n.fv = v^n.D\varphi x \\ fg(v^nfv) &= fg(v^nD\varphi x) = \frac{d^n\varphi x}{dx^n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

De même:

$$\left.\begin{aligned} D.(\textstyle\int^n \varphi x dx^n) &= v^{-n}.fv = v^{-n}.D.\varphi x \\ fg(v^{-n}fv) &= fg(v^{-n}D\varphi x) = \textstyle\int^n \varphi x dx^n \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

En prenant la différence finie de l'équation (3) n fois de suite, on aura:

$$\Delta^n{}_\alpha \varphi x = \int e^{vx}(e^{v\alpha}-1)^n.fvdv,$$

en désignant par α la différence de x;

donc:

$$\left.\begin{aligned} D.\Delta_\alpha{}^n\varphi x &= (e^{v\alpha}-1)^n.fv \\ fg((e^{v\alpha}-1)^n.fv) &= \Delta_\alpha{}^n\varphi x \\ D.\Sigma_\alpha{}^n(\varphi x) &= (e^{v\alpha}-1)^{-n}.fv \\ fg((e^{v\alpha}-1)^{-n}.fv) &= \Sigma_\alpha{}^n\varphi x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

On trouvera entièrement de la même manière:

$$\left.\begin{aligned} &D.(\Delta_\alpha{}^n \Delta_{\alpha'}{}^{n'} \Delta_{\alpha''}{}^{n''} \ldots d^m\varphi(x+\beta)) = e^{v\beta}.v^m(e^{v\alpha}-1)^n(e^{v\alpha'}-1)^{n'}(e^{v\alpha''}-1)^{n''}\ldots fv. \\ &fg(v^m(e^{v\alpha}-1)^n(e^{v\alpha'}-1)^{n'}(e^{v\alpha''}-1)^{n''}\ldots e^{v\beta}) = \Delta_\alpha{}^n \Delta_{\alpha'}{}^{n'} \Delta_{\alpha''}{}^{n''} \ldots d^m\varphi(x+\beta) \end{aligned}\right\}. (13)$$

Soit en général

$$\delta(\varphi x) = A_{n,\alpha}.\frac{d^n\varphi(x+\alpha)}{dx^n} + A_{n',\alpha'}.\frac{d^{n'}\varphi(x+\alpha')}{dx'} + \ldots\ldots\ldots (14)$$

on aura

$$\delta(\varphi x) = \int e^{vx}.fv(A_{n,\alpha}.v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'}.v^{n'}.e^{v\alpha'} + \ldots)dv,$$

donc

$$D(\delta\varphi x) = fv.(A_{n,\alpha}.v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'}.v^{n'}.e^{v\alpha'} + \ldots).$$

Soit $\quad A_{n,\alpha}.v^n e^{v\alpha} + A_{n',\alpha'}.v^{n'}.e^{v\alpha'} + \ldots = \psi(v) \ldots\ldots\ldots (15)$

on aura $\quad D(\delta\varphi x) = \psi(v).fv = \psi(v).D\varphi x \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$

Soit de même

$$\left.\begin{aligned} D(\delta_1\varphi x) &= \psi_1(v).D\varphi x \\ D(\delta_2\varphi x) &= \psi_2(v).D\varphi x \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D(\delta_\mu\varphi x) &= \psi_\mu(v).D\varphi x \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

on trouvera aisément:

$$D(\delta\delta_1\varphi x) = \psi(v).\psi_1(v).fv$$

$$D(\delta\delta_1\delta_2\varphi x) = \psi(v).\psi_1(v).\psi_2(v).fv,$$

et en général

$$\left.\begin{array}{l} D(\delta\delta_1\delta_2\ldots\delta_\mu\varphi x) = \psi(v).\psi_1(v).\psi_2(v)\ldots\psi_\mu(v).fv \\ \text{donc aussi } D(\delta^n\varphi x) = (\psi v)^n.D\varphi x \\ D(\delta^n\delta_1^{n_1}\delta_2^{n_2}\ldots\delta_\mu^{n_\mu}\varphi x) = (\psi v)^n.(\psi_1 v)^{n_1}.(\psi_2 v)^{n_2}\ldots(\psi_\mu v)^{n_\mu}.D\varphi x \\ fg\big((\psi v)^n.(\psi_1 v)^{n_1}\ldots(\psi_\mu v)^{n_\mu}.D\varphi x\big) = \delta^n\delta_1^{n_1}\ldots\delta_\mu^{n_\mu}\varphi x \end{array}\right\} \quad (18)$$

Application de la théorie précédente.

La théorie précédente des fonctions géneratrices est très féconde pour le développement des fonctions en séries.

Supposons par exemple qu'on veut développer $\varphi(x+\alpha)$ suivant les coefficiens différentiels de φx.

La déterminante de $\varphi(x+\alpha)$ est $= e^{v\alpha}.fv$, et celle de $\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = v^n.fv$. Il s'agit donc seulement de développer $e^{v\alpha}$ en termes de la forme $A_n.v^n$; or on a

$$e^{v\alpha} = 1 + v\alpha + \frac{v^2}{1.2}\alpha^2 + \frac{v^3}{1.2.3}.\alpha^3 + \ldots + \frac{v^n}{1.2.3\ldots n}\alpha^n + \ldots$$

donc

$$e^{v\alpha}.fv = fv + \alpha.vfv + \frac{\alpha^2}{1.2}.v^2fv + \frac{\alpha^3}{1.2.3}.v^3fv + \ldots$$

En prenant la fonction génératrice de chaque membre de cette équation, on aura, en remarquant que

$$fg(e^{v\alpha}.fv) = \varphi(x+\alpha) \text{ et } fg(v^nfv) = \frac{d^n.\varphi x}{dx^n},$$

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha.\frac{d\varphi x}{dx} + \frac{\alpha^2}{1.2}.\frac{d^2\varphi x}{dx^2} + \ldots$$

comme on sait.

Supposons en général qu'on ait une relation quelconque entre plusieurs fonctions de la forme: $(\psi v).(\psi_1 v)$.. etc. composée de termes de la forme

$$A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}.(\psi v)^n.(\psi v_1)^{n_1}\ldots(\psi v_\mu)^{n_\mu}$$

et désignons cette relation par

$$\Sigma A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}.(\psi v)^n\,(\psi v_1)^{n_1}\ldots(\psi v_\mu)^{n_\mu} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19)$$

En multipliant par fv et prenant la fonction génératrice, on aura

$$\Sigma A_{n,n_1,n_2\ldots n_\mu}.fg\big(fv.(\psi v)^n.(\psi v_1)^{n_1}\ldots(\psi v_\mu)^{n_\mu} = 0;$$

c'est-à-dire $\qquad \Sigma A_{n,n_1,n_2 \ldots n_\mu} . \delta^n \delta_1^{n^1} \delta_2^{n^2} \ldots \delta_\mu^{n_\mu}(\varphi x) = 0$ . . . . (20

Cette équation exprimera une relation générale entre les différentes opérations indiquées par les lettres $\delta, \delta_1, \delta_2, \ldots$

Problème I. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x+\alpha) + a\varphi x$, et proposons nous de développer $\delta^n \varphi x$ en termes de la forme $A_m . \varphi(x + m\alpha)$.

La déterminante de $\varphi(x+\alpha)$ étant $e^{v\alpha} . fv$ et celle de φx, fv, il est clair que

$$D\delta\varphi x = (e^{v\alpha} + a) fv,$$

donc
$$D\delta^n \varphi x = (e^{v\alpha} + a)^n . fv;$$

ayant de même $D\varphi(x+m\alpha) = e^{vm\alpha} . fv$, il faut développer $(e^{v\alpha} + a)^n$ suivant les puissances de $e^{v\alpha}$;

or on a

$$(a + e^{v\alpha})^n = a^n + n a^{n-1} . e^{v\alpha} + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} . e^{2v\alpha} + \ldots$$

donc $\quad \delta^n \varphi x = a^n . \varphi x + n . a^{n-1} . \varphi(x+\alpha) + \frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} . \varphi(x + 2\alpha) + \ldots$

on a aussi

$$(a + e^{v\alpha})^n = e^{nv\alpha} + na . e^{(n-1)v\alpha} + \frac{n(n-1)}{2} a^2 . e^{(n-2)v\alpha} + \ldots$$

donc

$$\delta^n \varphi x = \varphi(x + n\alpha) + na\varphi\big(x + (n-1)\alpha\big) + \frac{n(n-1)}{2} a^2 . \varphi\big(x + (n-2)\alpha\big) + \ldots$$

En faisant $a = -1$, on a $\delta^n \varphi x = \Delta_\alpha{}^n \varphi x$,

donc

$$\Delta_\alpha{}^n \varphi x = \varphi(x + n\alpha) - n\,\varphi\big(x + (n-1)\alpha\big) + \frac{n(n-1)}{2} . \varphi\big(x + (n-2)\alpha\big) - \ldots$$

Problème II. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x+\alpha) + a\varphi x$, $\delta_1 \varphi x = \varphi(x + \alpha_1) + a_1 \varphi x$ et proposons nous d'exprimer l'opération $\delta^n{}_1$ par δ^m.

On a $\quad D\delta^m \varphi x = (e^{v\alpha} + a)^m . fv$, $D\delta^n{}_1 \varphi x = (e^{v\alpha_1} + a_1)^n . fv$.

Il faut donc exprimer $(e^{v\alpha_1} + a_1)^n$ en termes de la forme $A_m (e^{v\alpha} + a)^m$.

Soit $\quad e^{v\alpha_1} + a_1 = y$, $e^{v\alpha} + a = z$, on aura

$$e^v = (y - a_1)^{\frac{1}{\alpha_1}} = (z - a)^{\frac{1}{\alpha}};$$

donc
$$y = a_1 + (z - a)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}$$

$$y^n = \left(a_1 + (z - a)^{\frac{\alpha_1}{\alpha}}\right)^n$$

$$y^n = \Sigma . A_m . z^m,$$

donc
$$\delta^n{}_1 \varphi x = \Sigma . A_m . \delta^m \varphi x.$$

Soit par exemple $a_1 = a$, on a

$$y^n = (a_1 - a + z)^n = (a_1 - a)^n + n(a_1 - a)^{n-1}.z + \ldots = z^n + n(a_1 - a)z^{n-1} + \ldots$$

donc

$$\delta^n{}_1\varphi x = (a_1 - a)^n.\varphi x + n(a_1 - a)^{n-1}.\delta\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}(a_1 - a)^{n-2}.\delta^2\varphi x + \ldots$$

$$\delta^n{}_1\varphi x = \delta^n\varphi x + n(a_1 - a)\delta^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}(a_1 - a)^2.\delta^{n-2}\varphi x + \ldots$$

En faisant $a_1 = 0$, on aura $\delta^n{}_1\varphi x = \varphi(x + n\alpha)$, donc

$$\varphi(x + n\alpha) = \delta^n\varphi x - na.\delta^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}a^2\delta^{n-2}\varphi x - \ldots$$

si $a = -1$, on aura

$$\varphi(x + n\alpha) = \Delta_\alpha{}^n\varphi x + n\Delta_\alpha{}^{n-1}\varphi x + \frac{n(n-1)}{2}\Delta_\alpha{}^{n-2}\varphi x + \ldots$$

Problème III. Soit $\delta\varphi x = \varphi(x + \alpha) - a\varphi x$ et $\delta_1\varphi x = c\varphi x + k\frac{d\varphi x}{dx}$ et proposons nous de déterminer $\delta_1{}^m$ par δ.

On a $$D\delta_1\varphi x = (c + kv).fv,$$
donc $$D\delta^n{}_1\varphi x = (c + kv)^n.fv;$$
or $$D\delta\varphi x = e^{v\alpha} - a;$$
il faut donc développer $(c + kv)^n.fv$ suivant les puissances de $e^{v\alpha} - a$.

Soit $c + kv = y$, $e^{v\alpha} - a = z$, on aura

$$v = \frac{1}{\alpha}\log(z + a),\ y = c + \frac{k}{\alpha}\log(z + a).$$

$$y = c + \frac{k}{\alpha}\log a + \frac{k}{\alpha}\left(\frac{z}{a} - \frac{1}{2}.\frac{z^2}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{z^3}{a^3} - \ldots\right)$$

$$y^n = \left[c + \frac{k}{\alpha}\log a + \frac{k}{\alpha}\left(\frac{z}{a} - \frac{1}{2}.\frac{z^2}{a^2} + \frac{1}{3}.\frac{z^3}{a^3} - \ldots\right)\right]^n = \Sigma A_m.z^m$$

donc $$\delta^n{}_1\varphi x = \Sigma A_m\delta^m\varphi x.$$

Soit $c = 0$, $a = 1$, $k = 1$, on aura $\delta_1{}^n\varphi x = \frac{d^n\varphi x}{dx^n}$;

donc $$\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = \Sigma A_m.\Delta_\alpha{}^m\varphi x,$$

où $$\Sigma A_m z^m = \frac{1}{\alpha^n}\left(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \ldots\right)^n;$$

en faisant $n = 1$, on aura

$$\frac{d\varphi x}{dx} = \frac{1}{\alpha}\left(\Delta\varphi x - \tfrac{1}{2}\Delta^2\varphi x + \tfrac{1}{3}\Delta^3\varphi x - \ldots\right)$$

Problème IV. Développer la fonction $\varphi(x + \alpha)$ en termes de la forme $\frac{d^n\varphi(x + n\beta)}{dx^n}$.

On a $D\varphi(x+\alpha)=e^{\alpha v}.fv$ et $D.\frac{d^n\varphi(x+n\beta)}{dx^n}=e^{n\beta v}.v^n.fv$.

Il s'agit donc de développer $e^{\alpha v}$ suivant les puissances de $v.e^{\beta v}$. Or on a (Legendre Ex. de calc. int. T. 2. p. 254):

$$b^v=1+lb.vc^v+lb(lb-2lc)\frac{(v.c^v)^2}{2}+lb(lb-3lc)^2.\frac{(v.c^v)^3}{2.3}+\text{etc.}$$

Soit $b=e^\alpha$, $c=e^\beta$, on aura $lb=\alpha$, $lc=\beta$, donc

$$e^{\alpha v}=1+\alpha.ve^{\beta v}+\alpha(\alpha-2\beta)\frac{v^2e^{2\beta v}}{2}+\alpha(\alpha-3\beta)^2.\frac{v^3.e^{3\beta v}}{2.3}+\text{etc.}$$

donc

$$\varphi(x+\alpha)=\varphi x+\alpha.\frac{d\varphi(x+\beta)}{dx}+\frac{\alpha(\alpha-2\beta)}{2}.\frac{d^2\varphi(x+2\beta)}{dx^2}+\frac{\alpha(\alpha-3\beta)^2}{2.3}.\frac{d^3\varphi(x+3\beta)}{dx}+\dots$$
$$\dots+\frac{\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}}{1.2.3\dots n}.\frac{d^n\varphi(x+n\beta)}{dx}+\dots$$

En posant $x=0$, et écrivant ensuite x au lieu de α, on aura:

$$\varphi x=\varphi(0)+x.\varphi'(\beta)+\frac{x(x-2\beta)}{2}.\varphi''(2\beta)+\frac{x(x-3\beta)^2}{2.3}.\varphi'''(3\beta)+\dots$$

Soit $\varphi x=x^m$, on a $\varphi(x+n\beta)=(x+n\beta)^m$,

donc $\varphi^{(n)}(x+n\beta)=m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)(x+n\beta)^{m-n}$,

et par suite:

$$(x+\alpha)^m=x^m+\frac{m}{1}\alpha.(x+\beta)^{m-1}+\frac{m(m-1)}{2}\alpha(\alpha-2\beta)(x+2\beta)^{m-2}+\dots$$
$$\dots+\frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-n+1)}{1.2.3\dots n}.\alpha(\alpha-n\beta)^{n-1}.(x+n\beta)^{m-n}+\dots$$

Soit $\varphi x=\log x$, on aura $\varphi(x+n\beta)=\log(x+n\beta)$;

donc $\varphi^{(n)}(x+n\beta)=\pm\frac{1.2.3\dots(n-1)}{(x+n\beta)^n}$;

donc

$$\log(x+\alpha)=\log x+\frac{\alpha}{x+\beta}+\frac{1}{2}.\frac{\alpha}{x+2\beta}.\frac{2\beta-\alpha}{x+2\beta}+\frac{1}{3}.\frac{\alpha}{x+3\beta}.\left(\frac{3\beta-\alpha}{x+3\beta}\right)^2+\dots$$

Soit $x=1$, on aura

$$\log(1+\alpha)=\frac{\alpha}{1+\beta}+\frac{1}{2}.\frac{\alpha}{1+2\beta}.\frac{2\beta-\alpha}{1+2\beta}+\frac{1}{3}.\frac{\alpha}{1+3\beta}.\left(\frac{3\beta-\alpha}{1+3\beta}\right)^2+\dots$$

$$\log(1+\alpha)=\frac{\alpha}{1+\beta}+\frac{1}{2}.\frac{\alpha}{1+2\beta}\left(1-\frac{1+\alpha}{1+2\beta}\right)+\frac{1}{3}.\frac{\alpha}{1+3\beta}.\left(1-\frac{1+\alpha}{1+3\beta}\right)^2+\dots$$

Soit $\alpha=2\beta$, on aura

$$\log(1+2\beta)=\frac{2\beta}{1+\beta}+\frac{2}{3}.\frac{\beta^3}{(1+3\beta)^3}+\frac{1}{4}\ \frac{2.2^3.\beta^4}{(1+4\beta)^4}+\dots$$

$$\log(3)=1+\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{4})^3+\tfrac{2}{4}.\tfrac{1}{5}.(\tfrac{2}{5})^3+\tfrac{2}{5}.\tfrac{1}{6}.(\tfrac{3}{6})^4+\tfrac{2}{6}.\tfrac{1}{7}.(\tfrac{4}{7})^5+\dots+\frac{2}{n}.\frac{1}{n+1}.\left(\frac{n-2}{n+1}\right)^{n-1}+\dots$$

Problème V. Développer $\Delta_\alpha{}^n\varphi x$ suivant les puissances de n.

On a $$D\Delta_\alpha{}^n\varphi x = (e^{v\alpha}-1)^n . fv;$$

donc $$D\Delta_\alpha{}^n\varphi x = fv\left(1 + n\log(e^{v\alpha}-1) + \frac{n^2}{2}\left(\log(e^{v\alpha}-1)\right)^2 + \ldots\right),$$

d'où l'on tire en prenant la fonction génératrice

$$\Delta_\alpha{}^n\varphi x = \varphi x + nfg\left(\log(e^{v\alpha}-1).fv\right) + \frac{n^2}{2} fg\left[\left(\log(e^{v\alpha}-1)\right)^2 fv\right] + \ldots$$

Soit $$fg\left(\log(e^{v\alpha}-1).fv\right) = \delta\varphi x,$$

on aura

$$fg\left(\left(\log(e^{v\alpha}-1)\right)^n . fv\right) = \delta^n\varphi x;$$

donc $$\Delta_\alpha{}^n\varphi x = \varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}.\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}.\delta^3\varphi x + \ldots$$

Pour déterminer $\delta\varphi x$ il faut développer la quantité $\log(e^{v\alpha}-1)$.

On a $\log(e^{v\alpha}-1) = \log\left(e^{v\alpha}(1-e^{-v\alpha})\right) = v\alpha - e^{-v\alpha} - \frac{1}{2}e^{-2v\alpha} - \frac{1}{3}e^{-3v\alpha} - \ldots$

donc

$$\delta\varphi x = \alpha . \frac{d\varphi x}{dx} - \varphi(x-\alpha) - \tfrac{1}{2}\varphi(x-2\alpha) - \tfrac{1}{3}\varphi(x-3\alpha) - \tfrac{1}{4}\varphi(x-4\alpha) - \ldots$$

En différentiant cette expression par rapport à α, on aura:

$$d(\delta\varphi x) = d\alpha\left(\frac{d\varphi x}{dx} + \varphi'(x-\alpha) + \varphi'(x-2\alpha) + \varphi'(x-3\alpha) + \ldots\right)$$

Soit

$$\varphi x + \varphi(x-\alpha) + \varphi(x-2\alpha) + \ldots = \delta_1\varphi x,$$

on aura

$$D\varphi x + D\varphi(x-\alpha) + D\varphi(x-2\alpha) + \ldots = D\delta_1\varphi x;$$

donc $$(1 + e^{-\alpha v} + e^{-2\alpha v} + \ldots)\, fv = \frac{fv}{1-e^{-\alpha v}} = D\delta_1\varphi x;$$

donc $$D\delta_1\varphi x = \frac{e^{\alpha v}.fv}{e^{\alpha v}-1} = \left(1 + (e^{\alpha v}-1)^{-1}\right).fv;$$

donc $$\delta_1\varphi x = \varphi x + \Delta_\alpha{}^{-1}\varphi x;$$

donc $$\delta_1\varphi' x = \varphi' x + \Delta_\alpha{}^{-1}\varphi' x;$$

donc $$\frac{d(\delta\varphi x)}{d\alpha} = \varphi' x + \Sigma_\alpha\varphi' x,$$

et $$\delta\varphi x = \alpha . \varphi' x + \int d\alpha\Sigma_\alpha\varphi' x.$$

Si l'on veut exprimer $\delta\varphi x$ par $\frac{d^n\varphi x}{dx}$, il faut développer $\log(e^{v\alpha}-1)$ suivant les puissances de v. On aura:

$$e^{v\alpha} - 1 = v\alpha + \frac{v^2\alpha^2}{2} + \frac{v^3\alpha^3}{2.3} + \ldots$$

en posant donc

$$\log\left(\alpha . v + \frac{\alpha^2}{2} . v^2 + \dots\right) = \log v + \log \alpha + \alpha . A_1 v + \alpha^2 A_2 v^2 + \dots$$

on aura:

$$\delta\varphi x = fg\,(\log v . fv) + \log\alpha . \varphi x + \alpha . A_1\varphi' x + \alpha^2 . A_2\varphi'' x + \alpha^3 . A_3\varphi''' x + \dots$$

Problème VI. Développer $\frac{d^n\varphi x}{dx^n}$ suivant les puissances de n.

On a $$D\left(\frac{d^n\varphi x}{dx^n}\right) = v^n . fv = fv\left(1 + n\log v + \frac{n^2}{2}(\log v)^2 + \dots\right);$$

donc $$\frac{d^n\varphi x}{dx^n} = \varphi x + n . \delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\,\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\,\delta^3\varphi x + \dots,$$

où $$D(\delta\varphi x) = \log v . fv;$$

or $\log v = -\log\left(1 + \frac{1}{v}\right) + \log(1 + v) = v - \frac{1}{v} - \frac{1}{2}\left(v^2 - \frac{1}{v^2}\right) + \frac{1}{3}\left(v^3 - \frac{1}{v^3}\right) + \dots$

donc

$$\delta\varphi x = \begin{cases} \varphi' x - \frac{1}{2}\varphi'' x + \frac{1}{3}\varphi''' x - \dots \\ -\int\varphi x dx + \frac{1}{2}\int^2\varphi x dx^2 - \frac{1}{3}\int^3\varphi x dx^3 + \dots \end{cases}$$

On peut exprimer $\delta\varphi x$ de plusieurs autres manières. Soit par exemple

$$\log v = \log(1 + v - 1) = v - 1 - \tfrac{1}{2}(v - 1)^2 + \tfrac{1}{3}(v - 1)^3 - \dots$$

on aura $$\delta\varphi x = \delta_1\varphi x - \tfrac{1}{2}\delta_1{}^2\varphi x + \tfrac{1}{3}\delta_1{}^3\varphi x - \dots$$

où $$\delta_1\varphi x = \varphi' x - \varphi x.$$

Problème VII. Développer $\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}$ suivant les puissances de n.

On a $$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n} = e^x\left(\varphi x + n\varphi' x + \frac{n(n-1)}{2}\varphi'' x + \dots\right) = e^x . \psi x;$$

donc $$D\psi x = \left(1 + nv + \frac{n(n-1)}{2}v^2 + \dots\right)fv = (1 + v)^n . fv$$

$$D\psi x = fv\left(1 + n\log(1 + v) + \frac{n^2}{2}(\log(1 + v))^2 + \dots\right);$$

donc $$\psi x = \varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\,\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\,\delta^3\varphi x + \dots$$

donc $$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n} = e^x\left(\varphi x + n\delta\varphi x + \frac{n^2}{2}\,\delta^2\varphi x + \frac{n^3}{2.3}\,\delta^3\varphi x + \dots\right),$$

où $$D . \delta\varphi x = \log(1 + v) = v - \tfrac{1}{2}v^2 + \tfrac{1}{3}v^3 - \dots$$

donc $$\delta\varphi x = \varphi' x - \tfrac{1}{2}\varphi'' x + \tfrac{1}{3}\varphi''' x - \dots$$

On a $$D . \varphi(x + \alpha) = e^{\alpha v} . fv;$$

donc $$D . \varphi(x + \alpha\sqrt{-1}) = e^{\alpha v\sqrt{-1}} . fv$$

et $$D . \varphi(x - \alpha\sqrt{-1}) = e^{-\alpha v\sqrt{-1}} . fv,$$

d'où l'on tire

$$D.\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2}=\cos(\alpha v).fv,$$

$$D:\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}=\sin(\alpha v).fv.$$

Or on a, comme on sait,

$$\tfrac{1}{2}=\cos(\alpha v)-\cos(2\alpha v)+\cos(3\alpha v)-\ldots$$

donc en multipliant par fv et prenant la fonction génératrice:

$$\tfrac{1}{2}\varphi x=\frac{\varphi(x+\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha\sqrt{-1})}{2}-\frac{\varphi(x+2\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-2\alpha\sqrt{-1})}{2}$$

$$+\frac{\varphi(x+3\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-3\alpha\sqrt{-1})}{2}-\frac{\varphi(x+4\alpha\sqrt{-1})+\varphi(x-4\alpha\sqrt{-1})}{2}$$

$$+\text{etc.}$$

ou bien

$$\varphi x=\varphi(x+\alpha)+\varphi(x-\alpha)-\varphi(x+2\alpha)-\varphi(x-2\alpha)$$
$$+\varphi(x+3\alpha)+\varphi(x-3\alpha)-\varphi(x+4\alpha)-\varphi(x-4\alpha)$$
$$+\text{etc.}$$

Supposons qu'on ait

$$\psi(v)=\int f(v_1t)dt, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

et soit

$$\psi(v).fv=D\delta\varphi x,$$

on aura d'après la définition de la déterminante

$$\delta\varphi x=\int e^{vx}.\psi v.fv.dv$$

c'est-à-dire

$$\delta\varphi x=\int e^{vx}.fvdv.\int f(v_1t).dt=\int dt.\int e^{vx}.fv.f(v_1t).dv$$

Cela posé, soit

$$fv.f(v_1t)=D.\delta_1\varphi x,$$

on aura

$$\delta_1\varphi x=\int e^{vx}.fv.f(v_1t)dv;$$

donc

$$\delta\varphi x=\int dt.\delta_1\varphi x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22)$$

or on a

$$D.\delta\varphi x=\int D.\delta_1\varphi x.dt;$$

donc

$$\left.\begin{aligned}&D.\int dt.\delta_1\varphi x=\int D.\delta_1\varphi x.dt\\ &\int dt.fg(f(v_1t))=fg(\int dt.f(v_1t))\end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (23)$$

et

Ces équations peuvent servir à exprimer $\delta\varphi x$ par une autre opération $\delta_1\varphi x$ au moyen d'une intégrale définie.

On a par exemple

$$(e^{v\alpha}-1)^{-1}-(v\alpha)^{-1}+\tfrac{1}{2}=2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin(v\alpha t)}{e^{2\pi t}-1};$$

donc en prenant la fonction génératrice

$$\Sigma_\alpha\varphi x-\frac{1}{\alpha}.\int\varphi x dx+\tfrac{1}{2}\varphi x=2\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{2\pi t}-1}.\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})-\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

On a $$e^{a}.e^{-\alpha av}.\frac{1}{1-\alpha v}-e^{a'}.e^{-a'\alpha v}.\frac{1}{1-\alpha v}=\int_{a'}^{a}e^{(1-\alpha v)t}dt,$$

c'est-à-dire

$$\left.\begin{array}{l} e^{a}.(e^{-\alpha av}+\alpha v.e^{-\alpha av}+\alpha^2v^2.e^{-\alpha av}+\ldots) \\ -e^{a'}.(e^{-\alpha a'v}+\alpha v.e^{-\alpha a'v}+\alpha^2v^2.e^{-\alpha a'v}+\ldots)\end{array}\right\}=\int_{a'}^{a}e^{t}.e^{-\alpha vt}.dt.$$

En multipliant par fv, et prenant la fonction génératrice, on aura en remarquant que

$$fg(v^n.e^{-\alpha av}.fv)=\frac{d^n\varphi(x-\alpha a)}{dx^n},$$

$$fg(e^{-\alpha vt}.fv)=\varphi(x-\alpha t),$$

$$\left.\begin{array}{l} e^{a}(\varphi(x-\alpha a)+\alpha\varphi'(x-\alpha a)+\alpha^2\varphi''(x-\alpha a)+\alpha^3\varphi'''(x-\alpha a)+\ldots) \\ -e^{a'}(\varphi(x-\alpha a')+\alpha\varphi'(x-\alpha a')+\alpha^2\varphi''(x-\alpha a')+\alpha^3\varphi'''(x-\alpha a')+\ldots)\end{array}\right\}$$

$$=\int_{a'}^{a}e^{t}.\varphi(x-\alpha t).dt;$$

donc en faisant $a=0$ et $a'=-\frac{1}{0}$

$$\varphi x+\alpha\varphi'x+\alpha^2\varphi''x+\alpha^3\varphi'''x+\ldots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0}e^{t}.\varphi(x-\alpha t)dt;$$

donc en différentiant par rapport à x et mettant $-\alpha$ à la place de α,

$$\varphi'x-\alpha\varphi''x+\alpha^2\varphi'''x-\alpha^3\varphi''''x+\ldots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0}e^{t}.\varphi'(x+\alpha t)dt;$$

en multipliant par $d\alpha$ et intégrant on aura:

$$\alpha\varphi'x-\tfrac{1}{2}\alpha^2\varphi''x+\tfrac{1}{3}\alpha^3\varphi'''x-\tfrac{1}{4}\alpha^4.\varphi''''x+\ldots=C+\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}.\varphi(x+\alpha t).dt}{t}.$$

En faisant $\alpha=0$, on aura $C=-\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}dt}{t}.\varphi x;$

donc

$$\alpha\varphi'x-\tfrac{1}{2}\alpha^2\varphi''x+\tfrac{1}{3}\alpha^3\varphi'''x-\tfrac{1}{4}\alpha^4.\varphi''''x+\ldots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}dt}{t}\left(\varphi(x+\alpha t)-\varphi x\right),$$

et lorsque $\alpha=1$

$$\varphi'x-\tfrac{1}{2}\varphi''x+\tfrac{1}{3}\varphi'''x-\ldots=\int_{-\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{t}.dt}{t}\left(\varphi(x+t)-\varphi x\right).$$

De là il suit qu'on aura:

$$\frac{d^n(e^x\varphi x)}{dx^n}=e^x(\varphi x+n\delta\varphi x+\frac{n^2}{2}\delta^2\varphi x+\frac{n^3}{2.3}\delta^3\varphi x+\ldots)$$

où $$\delta\varphi x=\int_{\frac{1}{0}}^{0}\frac{e^{-t}.dt}{t}\left(\varphi(x-t)-\varphi x\right).$$

On a $$\frac{e^{\alpha av}}{\alpha v}-\frac{e^{\alpha a'v}}{\alpha v}=\int_{a'}^{a}e^{\alpha vt}.dt$$

donc en prenant la fonction génératrice:

$$\int\varphi(x+\alpha a)dx-\int\varphi(x+\alpha a')dx=\alpha\int_{a'}^{a}\varphi(x+\alpha t).dt.$$

On a (Legendre exerc. d. c. i. T. II p. 176)

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt \,.\, \cos(\alpha v t)}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-\alpha v}$$

donc $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2} = \frac{\pi}{2}\, \varphi(x \pm \alpha)$

Soit par exemgle $\varphi x = \frac{1}{x}$ on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{(1+t^2)(\alpha^2 t^2+x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x(x\pm\alpha)}.$$

En effet

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{(1+t^2)(\alpha^2 t^2+x^2)} = \frac{1}{x^2-\alpha^2}\left(\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{\alpha^2 dt}{x^2+\alpha^2 t^2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x(x+\alpha)}.$$

Soit $\varphi x = \frac{1}{x^n}$, on aura en faisant $\alpha t = z.\sin\varphi$, $x = z.\cos\varphi$,

$$\frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2} = z^{-n}.\cos n\varphi$$

or $z = \sqrt{(x^2+\alpha^2 t^2)}$, $\varphi = \text{arc. tang.}\left(\frac{\alpha t}{x}\right)$, donc

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{\cos\left(n.\text{arc. tang}\,\frac{\alpha t}{x}\right)}{(x^2+\alpha^2 t^2)^{\frac{n}{2}}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{(x+\alpha)^n}.$$

Soit par exemple $n = \frac{1}{2}$, on aura $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{(x^2+\alpha^2 t^2)}}\right)}$;

donc $$\frac{\cos n\varphi}{z^n} = \frac{\cos\frac{1}{2}\varphi}{z^{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}[x+\sqrt{(x^2+\alpha^2 t^2)}]}}{\sqrt{(x^2+\alpha^2 t^2)}};$$

donc $$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{\sqrt{[x+\sqrt{(x^2+\alpha^2 t^2)}]}}{\sqrt{(x^2+\alpha^2 t^2)}} = \frac{\pi}{\sqrt{(2)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{(x+\alpha)}}.$$

On a $z = \frac{x}{\cos\varphi} = \frac{\alpha t}{\sin\varphi}$, donc $t = \frac{x}{\alpha}.\text{tang}\,\varphi$;

on tire de là

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha x d\varphi}{\alpha^2.\cos^2\varphi + x^2.\sin^2\varphi}$$

$$z^{-n}\cos n\varphi = \frac{(\cos\varphi)^n}{x^n}.\cos n\varphi;$$

donc

$$\frac{dt}{1+t^2}.z^{-n}.\cos n\varphi = \frac{\alpha}{x^{n-1}} \cdot \frac{(\cos\varphi)^n.\cos n\varphi.d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi};$$

donc

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{x^{n-1}}{\alpha(x+\alpha)^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^n.\cos n\varphi.d\varphi}{(x.\sin\varphi)^2+(\alpha.\cos\varphi)^2}.$$

Soit $\alpha = x$, on aura

$$\frac{\pi}{2^{n+1}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^n . \cos n\varphi . d\varphi.$$

On trouve encore chez M. Legendre les deux intégrales suivantes:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt . \sin at}{t(1+t^2)} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a})$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{tdt . \sin at}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} . e^{-a};$$

donc on aura, en faisant $a = \alpha v$ et prenant la fonction génératrice:

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{t(1+t^2)} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) - \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2} . (\varphi x - \varphi(x \pm \alpha))$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{tdt}{1+t^2} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) - \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2} . \varphi(x \pm \alpha).$$

En ajoutant on aura une troisième formule

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{t} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) - \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2} \varphi x,$$

ou bien en faisant $\alpha = 1$,

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{t} \cdot \frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = \frac{\pi}{2} \varphi x.$$

Soit par exemple $\varphi x = \frac{1}{x^n}$, $t = x . \tang \varphi$, on aura

$$\frac{dt}{t} = \frac{d\varphi}{\cos\varphi . \sin\varphi},$$

$$\frac{\varphi(x+t\sqrt{-1}) - \varphi(x-t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}} = -\left(\frac{\cos\varphi}{x}\right)^n \sin n\varphi,$$

donc
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sin\varphi} \cdot (\cos\varphi)^{n-1} . \sin n\varphi = \frac{\pi}{2}.$$

XIII.

Sur quelques intégrales définies.

On a vu précédemment que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos\varphi)^n.\cos n\varphi.d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x^{n-1}}{\alpha(x+\alpha)^n};$$

or
$$(\cos\varphi)^n=1+n.\log\cos\varphi+\frac{n^2}{2}(\log\cos\varphi)^2+\ldots$$

$$\cos n\varphi=1-\frac{n^2}{2}\cdot\varphi^2+\frac{n^4}{2.3.4}\cdot\varphi^4+\ldots$$

donc

$$(\cos\varphi)^n.\cos n\varphi=1+n.\log\cos\varphi+\frac{n^2}{2}\left((\log\cos\varphi)^2-\varphi^2\right)+\frac{n^3}{2.3}\left((\log\cos\varphi)^3-3\varphi^2(\log\cos\varphi)\right)$$

$$\ldots+\frac{n^m}{\Gamma(m+1)}.A_m$$

où on a, en faisant pour abréger $\log\cos\varphi=t$:

$$\frac{A_m}{\Gamma(m+1)}=\frac{t^m}{\Gamma(m+1)}-\frac{t^{m-2}.\varphi^2}{\Gamma(3).\Gamma(m-1)}+\frac{t^{m-4}.\varphi^4}{\Gamma(5).\Gamma(m-3)}+\frac{t^{m-6}.\varphi^6}{\Gamma(7)\Gamma(m-5)}+\ldots$$

or
$$\frac{x^n}{(x+\alpha)^n}=1+n.\log\frac{x}{x+\alpha}+\frac{n^2}{2}\cdot\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^2+\ldots$$

donc on aura

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}\cdot\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^m=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{A_m.d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi}.$$

Ainsi on aura:

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}\log\frac{x}{x+\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\cos\varphi.d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi}$$

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{x\alpha}\cdot\left(\log\frac{x}{x+\alpha}\right)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{[(\log\cos\varphi)^2-\varphi^2].d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi}.$$

En faisant $x = \alpha$ on aura

$$\frac{\pi}{2} \cdot (\log \tfrac{1}{2})^m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A_m \cdot d\varphi;$$

par exemple $$\frac{\pi}{2} \cdot \log \tfrac{1}{2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi . \log \cos \varphi.$$

Soit $\cos \varphi = y$, on aura $d\varphi = -\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$, donc

$$\frac{\pi}{2} \log 2 = \int_1^0 \frac{\log y . dy}{\sqrt{(1-y^2)}}.$$

En effet on a

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1} dx . \log\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} = \int_0^1 \frac{x^{p-1} dx}{\sqrt[n]{(1-x^n)^{n-q}}} \cdot \int_0^1 \frac{(x^{p-1} - x^{p+q-1} dx}{1-x^n};$$

donc $$\int_0^1 \frac{\log\left(\frac{1}{y}\right) . dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} \cdot \int_0^1 \left(\frac{1-y}{1-y^2}\right) dy:$$

or $$\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}} = \frac{\pi}{2} \text{ et } \int_0^1 \left(\frac{1-y}{1-y^2}\right) dy = \log 2.$$

On a $$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{\varphi(x+\alpha t\sqrt{-1}) + \varphi(x-\alpha t\sqrt{-1})}{2} = \frac{\pi}{2} \varphi(x+\alpha).$$

Soit $\varphi x = (\log x)^n$, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{1+t^2} \cdot \frac{[\log(x+\alpha t\sqrt{-1})]^n + [\log(x-\alpha t\sqrt{-1})]^n}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot (\log(x+\alpha))^n$$

or on a:

$$\log(x+\alpha t\sqrt{-1}) = \log x + \log\left(1+\frac{\alpha}{x} t\sqrt{-1}\right) = \log x + \frac{\log\left(1+\frac{\alpha}{x} t\sqrt{-1}\right) - \log\left(1-\frac{\alpha}{x} t\sqrt{-1}\right)}{2}$$

$$+ \tfrac{1}{2} \log\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2} t^2\right) = \log x + \tfrac{1}{2}\log\left(1+\frac{\alpha^2}{x^2} t^2\right) - \sqrt{-1} . \text{arc tang}\left(\frac{\alpha t}{x}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2} \log(x^2 + \alpha^2 t^2) - \sqrt{-1} . \text{arc tang}\left(\frac{\alpha t}{x}\right).$$

Soit $\frac{\alpha t}{x} = \text{tang } \varphi$, on aura

$$\log(x+\alpha t\sqrt{-1}) = \log x - \log \cos \varphi - \sqrt{-1} . \varphi$$

$$\frac{dt}{1+t^2} = \frac{\alpha x . d\varphi}{x^2 . \sin^2\varphi + \alpha^2 . \cos^2\varphi};$$

donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{x^2.\sin^2\varphi+\alpha^2.\cos^2\varphi}\cdot\frac{\left(\log\frac{x}{\cos\varphi}-\varphi\sqrt{-1}\right)^n+\left(\log\frac{x}{\cos\varphi}+\varphi\sqrt{-1}\right)^n}{2}=\frac{\pi}{2x\alpha}\left(\log(x+\alpha)\right)^n.$$

En faisant $x=\alpha=1$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,.\left[\left(\log\frac{1}{\cos\varphi}-\varphi\sqrt{-1}\right)^n+\left(\log\frac{1}{\cos\varphi}+\varphi\sqrt{-1}\right)^n\right]=\pi(\log 2)^n.$$

On a aussi en général, en faisant $t=\operatorname{tang} u$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du\left(\varphi(x+\alpha\operatorname{tang} u.\sqrt{-1})+\varphi(x-\alpha.\operatorname{tang} u.\sqrt{-1})\right)=\pi\varphi(x+\alpha);$$

donc en faisant $x=\alpha=1$, on aura:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} du\left(\varphi(1+\sqrt{-1}\operatorname{tang} u)+\varphi(1-\sqrt{-1}\operatorname{tang} u)\right)=\pi.\varphi(2).$$

Soit $\varphi x=\frac{x^m}{1+\alpha x^n}$, on aura

$$\varphi(1+\sqrt{-1}\operatorname{tang} u)=\frac{(1+\sqrt{-1}\operatorname{tg} u)^m}{1+\alpha(1+\sqrt{-1}\operatorname{tg} u)^n}=\frac{(\cos mu+\sqrt{-1}\sin mu)(\cos u)^{n-m}}{(\cos u)^n+\alpha.\cos nu+\alpha\sqrt{-1}.\sin nu}$$

$$=\frac{(\cos u)^{n-m}}{[(\cos u)^n+\alpha.\cos nu]^2+\alpha^2.\sin^2 nu}\cdot\Big[(\cos u)^n.\cos mu+\alpha\cos(m-n)u$$

$$+\sqrt{-1}\left((\cos u)^n.\sin mu+\alpha\sin(m-n)u\right)\Big];$$

on tire de là

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^{n-m}.[\cos mu.(\cos u)^n+\alpha.\cos(n-m)u]}{(\cos u)^{2n}+2\alpha.\cos nu(\cos u)^n+\alpha^2}\,du=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^m}{1+\alpha.2^n}.$$

Soit $m=0$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^n[(\cos u)^n+\alpha\cos nu]du}{(\cos u)^{2n}+2\alpha\cos nu.(\cos u)^n+\alpha^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{1+\alpha.2^n}.$$

Soit $m=n$, on aura

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos nu.(\cos u)^n+\alpha}{(\cos u)^{2n}+2\alpha\cos nu.(\cos u)^n+\alpha^2}\,du=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2^n}{1+\alpha.2^n}.$$

Si par exemple $n=1$, on aura

$$\frac{\pi}{1+2\alpha}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\cos u)^2+\alpha}{(\cos u)^2(1+2\alpha)+\alpha^2}\,du=\int_0^1 \frac{y^2+\alpha}{y^2(1+2\alpha)+\alpha^2}\cdot\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

Reprenons la formule

$$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2^n}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi)^n.\cos n\varphi.d\varphi.$$

Soit $n = \frac{m}{n}$, on aura

$$\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi)^{\frac{m}{n}} \cos \frac{m}{n} \varphi . d\varphi$$

Soit $\frac{\varphi}{n} = \theta$, on aura

$$\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} (\cos n\theta)^{\frac{m}{n}} \cos m\theta . d\theta;$$

or $\cos n\theta = (\cos\theta)^n - \frac{n(n-1)}{2} (\cos\theta)^{n-2} . \sin^2\theta + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} (\cos\theta)^{n-4} . \sin^4\theta + \ldots$

donc en faisant $\cos\theta = y$, $d\theta = -\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$,

$$\frac{\pi}{2n} \cdot \frac{1}{2^{\frac{m}{n}}} = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{2n}} \sqrt[n]{(\psi y)^m} . fy . \frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

où $\psi y = y^n - \frac{n(n-1)}{2} y^{n-2}(1-y^2) + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.3.4} y^{n-4}(1-y^2)^2 - \ldots$

$fy = y^m - \frac{m(m-1)}{2} y^{m-2}(1-y^2) + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{2.3.4} y^{m-4}(1-y^2)^2 - \ldots$

Soit par exemple $m=1$, $n=4$, on aura

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(2)}} = -\int_1^{\cos\frac{\pi}{8}} \sqrt[4]{(1-8y^2+8y^4)} . \frac{ydy}{\sqrt{(1-y^2)}}$$

Si l'on fait $y^2 = 1 - z^2$, on trouvera

$$\frac{\pi}{8} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(2)}} = -\int_0^{\sin\frac{\pi}{8}} dz \sqrt[4]{(1-8z^2+8z^4)}.$$

XIV.

Théorie des transcendantes elliptiques.

CHAPITRE I.

Réductions de l'intégrale $\int \frac{Pdx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}$ *par des fonctions algébriques.*

1. Pour plus de simplicité je désigne le radical par $\sqrt{R}$, on a donc à considérer l'intégrale

$$\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$$

P désignant une fonction algébrique rationnelle de x. On peut, comme on sait, décomposer P en plusieurs termes de la forme

$$A.x^m \text{ et } \frac{A}{(x-a)^m},$$

m étant un nombre entier quelconque. L'intégrale proposée $\int \frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ est donc immédiatement décomposable en plusieurs autres intégrales de la forme

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}} \text{ et } \int \frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}}.$$

Cherchons les réductions qu'on peut faire avec ces deux intégrales, en les considérant 1. séparément, et 2. ensemble.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$

2. Pour trouver la réduction générale dont cette intégrale est susceptible au moyen de fonctions algébriques, il s'agit de trouver la fonction algébrique la plus générale, dont la différentielle peut se décomposer en termes de la forme $\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}}$; car après avoir intégré la différentielle ainsi décomposée, il

est clair qu'on obtiendra la relation la plus générale qu'on peut obtenir entre les intégrales de la forme $\int \frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$.

Or on sait par le calcul différentiel qu'en différentiant une fonction qui contient des radicaux, ces mêmes radicaux se trouvent aussi dans la différentielle; il est donc impossible que la fonction cherchée peut contenir d'autres expressions radicales que $\sqrt{R}$: elle est donc de la forme $f(x,\sqrt{R})$, f désignant une fonction algébrique rationnelle de x et de $\sqrt{R}$. Une telle fonction est, comme on sait, toujours réductible à la forme $Q' + Q\sqrt{R}$, Q' et Q désignant deux fonctions rationnelles de x. Or il est clair qu'on peut faire abstraction du premier terme Q', puisque sa différentielle ne contient que des quantités rationnelles; on a donc

$$f(x,\sqrt{R}) = Q\sqrt{R}.$$

En différentiant $Q\sqrt{R}$, on voit au premier coup d'oeuil que la différentielle contiendra nécessairement des termes de la forme $\frac{A.dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ si Q est fractionnaire; car supposons que Q contienne un terme $\frac{1}{(x-a)^m}$, on aura en différentiant $\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}$,

$$d\left(\frac{\sqrt{R}}{(x-a)^m}\right) = \left\{\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{dR}{dx}}{(x-a)^m} - \frac{mR}{(x-a)^{m+1}}\right\}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Or quel que soit m, il est impossible que le coefficient de $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ dans l'expression précédente puisse devenir entier, à moins que R ne contienne deux ou plusieurs facteurs égaux; mais ce cas doit être exclu, puisqu'alors l'intégrale proposée serait de la forme $\int \frac{Pdx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2)}}$; donc, comme la différentielle ne doit contenir que des termes de la forme $\frac{Ax^m dx}{\sqrt{R}}$, il faut que Q soit une fonction algébrique entière de x; on a donc

$$Q = f(0) + f(1).x + f(2).x^2 + \ldots + f(n).x^n.$$

4. Différentions maintenant la fonction trouvée $Q\sqrt{R}$. On obtiendra d'abord

$$d(Q\sqrt{R}) = dQ.\sqrt{R} + \tfrac{1}{2}\cdot\frac{QdR}{\sqrt{R}},$$

donc
$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{R.dQ + \frac{1}{2}QdR}{dx}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = S.\frac{dx}{\sqrt{R}},$$

$$S = R.\frac{dQ}{dx} + \tfrac{1}{2}Q.\frac{dR}{dx}.$$

On a $$R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$
et $$Q = f(0) + f(1).x + f(2).x^2 + \ldots + f(n).x^n$$
donc en différentiant

$$\frac{dR}{dx} = \beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3,$$
$$\frac{dQ}{dx} = f(1) + 2f(2)x + 3f(3)x^2 \ldots + nf(n)x^{n-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'expression de S on obtiendra:

$$S = (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4)\,(f(1) + 2f(2)x + \ldots + nf(n)x^{n-1})$$
$$+ \tfrac{1}{2}\,(\beta + 2\gamma x + 3\delta x^2 + 4\varepsilon x^3)\,(f(0) + f(1)x + \ldots + f(n)x^n)$$

Soit $S = \varphi(0) + \varphi(1).x + \varphi(2).x^2 + \ldots + \varphi(m-1).x^{m-1} + \varphi(m).x^m$.

On obtiendra en développant et comparant les coefficiens, l'équation générale

$$\varphi(p) = (p+1).f(p+1).\alpha + p.f(p)\beta + (p-1).f(p-1)\gamma + (p-2).f(p-2)\delta + (p-3).f(p-3).\varepsilon$$
$$+ \tfrac{1}{2} f(p).\beta + f(p-1).\gamma + \tfrac{3}{2} f(p-2).\delta + 2f(p-3).\varepsilon,$$

c'est-à-dire:

$$\varphi(p) = (p+1).f(p+1).\alpha + (p+\tfrac{1}{2}).f(p).\beta + p.f(p-1)\gamma + (p-\tfrac{1}{2})f(p-2).\delta + (p-1)f(p-3).\varepsilon \quad \text{(a)}$$

En faisant successivement $p = 0, 1, 2, 3 \ldots m$, on obtiendra toutes les équations qui résultent de l'égalité des deux valeurs de S.

Quant à la valeur de n, on trouvera $n + 3 = m$, donc

$$n = m - 3.$$

5. De l'équation $d(Q\sqrt{R}) = S.\frac{dx}{\sqrt{R}}$, on tire en intégrant

$$Q\sqrt{(R)} = \int S.\frac{dx}{\sqrt{R}};$$

et en substituant les valeurs de Q et de S,

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \ldots + \varphi(m-1)\int\frac{x^{m-1}.dx}{\sqrt{R}} + \varphi(m).\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}\\ &= \sqrt{R}\,(f(0) + f(1).x + f(2).x^2 + \ldots f(m-3).x^{m-3}).\end{aligned}\right\} \quad \text{(b)}$$

Cette équation contient la relation la plus générale qu'on puisse trouver par des fonctions algébriques entre plusieurs intégrales de la forme $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, et c'est de cette équation qu'il faut tirer toutes les réductions dont les intégrales de cette forme sont susceptibles. Le premier membre de cette équation est en même temps l'intégrale la plus générale de la forme $\int\frac{P dx}{\sqrt{R}}$, P désignant une fonction entière de x, qui est intégrable par des fonctions algébriques.

6. Considérons maintenant l'équation (b). Comme la fonction multipliée par $\sqrt{R}$ du second membre doit être entiere, il faut que m soit égal ou plus grand que 3. Il suit de là qu'il est impossible de trouver une relation entre les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$, et que par conséquent ces trois intégrales sont irréductibles entre elles par des fonctions algébriques. Si au contraire m est égal ou plus grand que 3, on voit qu'il est toujours possible de réduire l'intégrale $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$ à des intégrales de la même forme dans lesquelles m est moindre; et il est évident que les seules intégrales irréductibles sont les trois suivantes

$$\int\frac{dx}{\sqrt{R}}, \int\frac{xdx}{\sqrt{R}}, \int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}.$$

Ces intégrales sont donc les seules fonctions transcendantes contenues dans la formule intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, P étant une fonction entière.

7. Pour réduire l'intégrale $\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}}$, faisons dans l'équation (b) $\varphi(m) = -1$, et nous aurons

$$\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \ldots + \varphi(m-1).\int\frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}(f(0) + f(1).x + f(2).x^2 + \ldots + f(m-3)x^{m-3}).$$

D'aprés ce qui précède on peut faire

$$\varphi(m-1) = \varphi(m-2) = \ldots = \varphi(3) = 0,$$

on a donc

$$\left.\begin{array}{l}\int\frac{x^m dx}{\sqrt{R}} = \varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} \\ \quad -\sqrt{R}(f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\ldots+f(m-3)x^{m-3})\end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (c)$$

Il reste à déterminer les coefficiens

$$\varphi(0), \varphi(1), \varphi(2), f(0), f(1), f(2) \ldots f(m-3).$$

Pour cela faisons dans l'équation (a) $p = 0, p = 1, \ldots p = m$, on obtiendra les équations suivantes au nombre de $m + 1$:

$$\begin{array}{l}\varphi(0) = f(1).\alpha + \frac{1}{2}f(0).\beta \\ \varphi(1) = 2f(2).\alpha + \frac{3}{2}f(1).\beta + f(0).\gamma \\ \varphi(2) = 3f(3).\alpha + \frac{5}{2}f(2).\beta + 2f(1).\gamma + \frac{3}{2}f(0).\delta \\ \quad 0 = 4f(4).\alpha + \frac{7}{2}f(3).\beta + 3f(2).\gamma + \frac{5}{2}f(1).\delta + 2f(0).\varepsilon \\ \quad 0 = 5f(5).\alpha + \frac{9}{2}f(4).\beta + 4f(3).\gamma + \frac{7}{2}f(2).\delta + 3f(1).\varepsilon \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}$$

$$0=(m-3)f(m-3)\alpha+(m-\tfrac{7}{2}).f(m-4)\beta+(m-4).f(m-5)\gamma+(m-\tfrac{9}{2}).f(m-6)\delta+(m-5).f(m-7)\varepsilon$$

$$0=(m-\tfrac{5}{2})f(m-3)\beta+(m-3).f(m-4)\gamma+(m-\tfrac{7}{2}).f(m-5)\delta+(m-4).f(m-6)\varepsilon$$

$$0=(m-2)f(m-3)\gamma+(m-\tfrac{5}{2}).f(m-4)\delta+(m-3).f(m-5)\varepsilon$$

$$0=(m-\tfrac{3}{2})f(m-3)\delta+(m-2).f(m-4)\varepsilon$$

$$-1=(m-1)f(m-3)\varepsilon$$

en remarquant que $\varphi(m)=-1$, $\varphi(3)=\varphi(4)=\ldots=\varphi(m-1)=0$.

Au moyen des $m-2$ dernières équations on peut déterminer les $m-2$ quantités $f(0)$, $f(1)$, $\ldots f(m-3)$, et les trois premières serviront ensuite à déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$.

En éliminant on trouvera:

$$f(m-3)=-\frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\varepsilon}$$

$$f(m-4)=\frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-1)(m-2)}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2}$$

$$f(m-5)=\frac{(m-2)}{(m-1)(m-3)}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon^2}-\frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^3}$$

$$f(m-6)=\frac{(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-4)}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon^2}-\frac{(m-\frac{3}{2})(m-3)}{(m-1)(m-2)(m-4)}\cdot\frac{\delta\gamma}{\varepsilon^3}-\frac{(m-2)(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-3)(m-4)}\cdot\frac{\delta\gamma}{\varepsilon^3}$$
$$+\frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^4}.$$

$$f(m-7)=\frac{(m-3)}{(m-1)(m-5)}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon^2}-\frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{7}{2})}{(m-1)(m-2)(m-5)}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^3}-\frac{(m-\frac{5}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^3}$$
$$-\frac{(m-2)(m-4)}{(m-1)(m-3)(m-5)}\cdot\frac{\gamma^2}{\varepsilon^3}+\frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-4)}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4}$$
$$+\frac{(m-\frac{3}{2})(m-3)(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-2)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4}+\frac{(m-2)(m-\frac{7}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-3)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\gamma\delta^2}{\varepsilon^4}$$
$$-\frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})(m-\frac{7}{2})(m-\frac{9}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^5}.$$

8. Pour exprimer en général le coefficient $f(m-p)$, faisons $\varepsilon=\varepsilon^{(0)}$ $\delta=\varepsilon^{(1)}$ $\gamma=\varepsilon^{(2)}$ $\beta=\varepsilon^{(3)}$ $\alpha=\varepsilon^{(4)}$. Cela posé, on peut aisément se convaincre que $f(m-p)$ est composé de termes de la forme

$$(-1)^{n+1}.\frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\left(m-\frac{k''+k'}{2}\right)\ldots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p-2}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')(m-k'')\ldots(m-k^{(n-1)})(m-k^{(n)})(m-p+2)},$$
$$\times\frac{\varepsilon^{(k-1)}.\varepsilon^{(k'-k)}.\varepsilon^{(k''-k')}\ldots\varepsilon^{(k^{(n)}-k^{(n-1)})}.\varepsilon^{(p-k^{(n)}-2)}}{\varepsilon^{n+3}},$$

où les quantités k, k', k'', etc. $p-2$ suivent l'ordre de leur grandeur, de maniére que $k' > k$, $k'' > k'$, etc. $p-2 > k^{(n)}$.

En donnant avec cette restriction toutes les valeurs entières aux quantités k, k', k'' etc. $k^{(n)}$, et à n toutes les valeurs entières depuis le plus grand nombre entier compris dans $\frac{p}{4}-2$ jusqu'à $p-5$ et en remarquant que chaque dénominateur aura $n+3$ facteurs binomes, on obtiendra tous les termes dont $f(m-p)$ est composé. On a donc

$$\left.\begin{array}{l} f(m-p)=\Sigma\frac{(-1)^{n+1}}{\varepsilon^{n+3}}\cdot\frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\left(m-\frac{k''+k'}{2}\right)\cdots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p-2}{2}\right)}{(m-1)(m-k)(m-k')(m-k'')\ldots(m-k^{(n)})(m-p+2)} \\ \times\,\varepsilon^{(k-1)}\cdot\varepsilon^{(k'-k)}\cdot\varepsilon^{(k''-k')}\cdots\varepsilon^{(p-k^{(n)}-2}. \end{array}\right\}\ (d)$$

Ayant ainsi trouvé les quantités $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$ etc. $f(m-3)$, on a ensuite

$$\left.\begin{array}{l} \varphi(0)=\alpha.f(1)+\frac{1}{2}\beta.f(0) \\ \varphi(1)=2\alpha.f(2)+\frac{3}{2}\beta.f(1)+\gamma f(0) \\ \varphi(2)=3\alpha.f(3)+\frac{5}{2}\beta.f(2)+2\gamma f(1)+\frac{3}{2}\delta f(0) \end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ (e)$$

9. Appliquons ce qui précède à un exemple, et proposons nous de réduire l'intégrale

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}}.$$

On a $m=4$ $n=m-3=1$, donc

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}}=\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}(f(0)+f(1).x).$$

Par les équations précédantes on a, en faisant $m=4$

$$f(1)=-\frac{1}{3\varepsilon},\ f(0)=\frac{5\delta}{12\varepsilon^2},\ f(2)=f(3)=\text{etc.}=0.$$

En substituant ces valeurs dans les équations (e), on aura;

$$\varphi(0)=\tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon}$$

$$\varphi(1)=\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon}$$

$$\varphi(2)=\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

En substituant ces valeurs on aura

$$\int\frac{x^4.dx}{\sqrt{R}}=\left(\tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\left(\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon}\right)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$$
$$+\left(\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2}-\tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}\right)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$
$$-\left(\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2}-\tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\,x\right)\sqrt{R}.$$

10. Dans le cas où $\beta=\gamma=\delta=0$, la valeur de $f(m-p)$ se simplifie beaucoup, et se réduit à un seul terme. En effet, comme $\varepsilon^{(1)}=\varepsilon^{(2)}=\varepsilon^{(3)}=0$, et comme $\varepsilon^{(4)}=\alpha$ est la seule quantité qui a une valeur différente de zéro, il est clair que tous les termes s'évanouiront dans l'expression de $f(m-p)$, excepté ceux dans lesquels on a $k-1=k'-k=k''-k'=\ldots=p-2-k^{(n)}=4$. On a donc $k=5$, $k'=9$, $k''=13$, $\ldots k^{(n)}=4n+5$, $p=4n+11$, d'où $n=\frac{p-11}{4}$. Chacune de ces quantités n, k, k', k'', $\ldots k^{(n)}$ n'a donc qu'une seule valeur, d'où il suit que $f(m-p)$ ne contient qu'un seul terme. De plus comme on a trouvé $p=4n+11$, il est clair que toutes les quantités $f(m-p)$ s'évanouiront, excepté celles de la forme $f(m-4n-11)$, dont la valeur est

$$(-1)^{n+1}\cdot\frac{(m\text{-}3)(m\text{-}7)(m\text{-}11)\ldots(m\text{-}4n\text{-}7)}{(m\text{-}1)(m\text{-}5)(m\text{-}9)\ldots(m\text{-}4n\text{-}9)}\cdot\frac{\alpha^{n+2}}{\varepsilon^{n+3}},$$

ou bien en mettant $n-3$ au lieu de n,

$$f(m-4n+1)=(-1)^n\cdot\frac{(m\text{-}3)(m\text{-}7)(m\text{-}11)\ldots(m\text{-}4n\text{+}5)}{(m\text{-}1)(m\text{-}5)(m\text{-}9)\ldots(m\text{-}4n\text{+}3)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

Pour déterminer $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$, il faut distinguer quatre cas:

1. si $m=4r$, 2. si $m=4r+1$, 3. si $m=4r+2$, 4. si $m=4r+3$.

Dans le premier cas on a:

$$f(4r-4n+1)=(-1)^n\cdot\frac{(4r\text{-}3)(4r\text{-}7)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}5)}{(4r\text{-}1)(4r\text{-}5)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}3)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}.$$

En faisant $n=r$, on a

$$f(1)=(-1)^r\cdot\frac{5\,.\,9\,.\,13\,.\,(4r\text{-}3)}{3\,.\,7\,.\,11\,.\,(4r\text{-}1)}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$
$$\varphi(0)=\alpha.f(1),\ \varphi(1)=\varphi(2)=0.$$

Dans le second cas on a:

$$f(4r-4n+2)=(-1)^n\cdot\frac{(4r\text{-}2)(4r\text{-}6)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}6)}{4r(4r\text{-}4)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}4)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}$$

En faisant $n = r$, on a:

$$f(2) = (-1)^r.\frac{6.10.14\ldots(4r\text{-}2)}{4.8.12\ldots 4r}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r},$$

$$\varphi(1) = 2\alpha.f(2),\ \varphi(0) = \varphi(2) = 0.$$

Dans le troisième cas on a:

$$f(4r-4n+3) = (-1)^n.\frac{(4r\text{-}1)(4r\text{-}5)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}7)}{(4r\text{+}1)(4r\text{-}3)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}5)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n}$$

En faisant $n = r$, on a:

$$f(3) = (-1)^r.\frac{7.11.15\ldots(4r\text{-}1)}{5.9.13\ldots(4r\text{+}1)}\cdot\frac{\alpha^{r-1}}{\varepsilon^r}$$

$$\varphi(2) = 3\alpha.f(3),\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0.$$

Dans le quatrième cas on a:

$$f(4r-4n+4) = (-1)^n.\frac{4r(4r\text{-}4)(4r\text{-}8)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}8)}{(4r\text{+}2)(4r\text{-}2)\ldots(4r\text{-}4n\text{+}6)}\cdot\frac{\alpha^{n-1}}{\varepsilon^n},$$

donc $\qquad f(1) = f(2) = f(3) = 0$ et $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0.$

11. On a vu que trois fonctions transcendantes sont nécessaires pour intégrer la différentielle $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$, P étant une fonction entière. Donc si l'on veut réduire ce nombre, il en résultera nécessairement certaines relations entre les quantités α, β, γ, δ, ε. Si l'on veut par exemple que $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ soit intégrable algébriquement, on doit faire $\varphi(0) = \varphi(1) = \varphi(2) = 0$, d'où il résultera entre les cinq quantités α, β, γ, δ, ε, trois relations par lesquelles on en peut déterminer trois par les deux autres. Déterminons par exemple α, β, γ, δ, ε de manière que $\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}}$ devienne intégrable algébriquement.

On a vu précédemment que dans ce cas

$$\varphi(0) = \tfrac{5}{24}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{\alpha}{\varepsilon}$$

$$\varphi(1) = \tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta}{\varepsilon}$$

$$\varphi(2) = \tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon^2} - \tfrac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

Comme ces quantités doivent être égalées à zéro, on trouvera:

$$\gamma = \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{5}{8}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon} = \tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon}$$

$$\beta = 2.\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\gamma\delta}{\varepsilon} = \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2} = \tfrac{25}{32}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2}$$

$$\alpha = \tfrac{5}{8}\cdot\frac{\beta\delta}{\varepsilon} = \tfrac{125}{256}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^3}$$

donc $$R = \tfrac{125}{256}\cdot\frac{\delta^4}{\varepsilon^3} + \tfrac{25}{32}\cdot\frac{\delta^3}{\varepsilon^2}x + \tfrac{15}{16}\cdot\frac{\delta^2}{\varepsilon}x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4;$$

donc, lorsque R a cette valeur, on a

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{R}} = -\left(\tfrac{5}{12}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon^2} - \tfrac{1}{3}\cdot\frac{1}{\varepsilon}x\right).\sqrt{R}.$$

En faisant $\delta = 4$ et $\varepsilon = 5$, on obtiendra

$$\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)}} = \tfrac{1}{15}(x-1)\sqrt{(1+2x+3x^2+4x^3+5x^4)}.$$

Réduction de l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}}$.

12. Pour réduire cette intégrale il faut, d'après ce qu'on a vu précédemment, différentier $Q\sqrt{R}$ en supposant Q fractionnaire. Faisons d'abord

$$Q = \frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}$$

d'où on déduit en différentiant

$$dQ = -\frac{\psi(1)dx}{(x\text{-}a)^2} - \frac{2\psi(2)dx}{(x\text{-}a)^3} - \frac{3\psi(3)dx}{(x\text{-}a)^4} - \ldots - \frac{(m\text{-}1)\psi(m\text{-}1)dx}{(x\text{-}a)^m}.$$

Pour rendre les calculs plus faciles, faisons

$$R = \alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4 = \alpha'+\beta'(x-a)+\gamma'(x-a)^2+\delta'(x-a)^3+\varepsilon'(x-a)^4.$$

Pour déterminer α', β', γ', δ', ε', mettons $x+a$ au lieu de x, et nous aurons:

$$\alpha'+\beta'x+\gamma'x^2+\delta'x^3+\varepsilon'x^4 = \alpha+\beta(x+a)+\gamma(x+a)^2+\delta(x+a)^3+\varepsilon(x+a)^4.$$

On tire de là

$$\alpha' = \alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4$$
$$\beta' = \beta + 2\gamma a + 3\delta a^2 + 4\varepsilon a^3$$
$$\gamma' = \gamma + 3\delta a + 6\varepsilon a^2$$
$$\delta' = \delta + 4\varepsilon a$$
$$\varepsilon' = \varepsilon.$$

En différentiant R on aura

$$dR = \beta' + 2\gamma'(x-a) + 3\delta'(x-a)^2 + 4\varepsilon'(x-a)^3.$$

Maintenant la différentielle de $Q\sqrt{R}$ donne

$$d(Q\sqrt{R}) = \frac{RdQ+\frac{1}{2}QdR}{\sqrt{R}};$$

donc en substituant les valeurs de R, Q, dR et dQ on obtiendra:

$$d(Q\sqrt{R}) = \left(\alpha'+\beta'(x\text{-}a)+\gamma'(x\text{-}a)^2+\delta'(x\text{-}a)^3+\varepsilon'(x\text{-}a)^4\right)\left(-\frac{\psi(1)}{(x\text{-}a)^2}-\frac{2\psi(2)}{(x\text{-}a)^3}-\ldots-\frac{(m\text{-}1)\psi(m\text{-}1)}{(x\text{-}a)^m}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\beta'+2\gamma'(x\text{-}a)+3\delta'(x\text{-}a)^2+4\varepsilon'(x\text{-}a)^3\right)\left(\frac{\psi(1)}{x\text{-}a}+\frac{\psi(2)}{(x\text{-}a)^2}+\ldots+\frac{\psi(m\text{-}1)}{(x\text{-}a)^{m-1}}\right)\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}$$
$$= S\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Supposons:

$$S=\varphi'(0)+\varphi'(1)(x-a)+\varphi'(2)(x-a)^2+\frac{\chi(1)}{x-a}+\frac{\chi(2)}{(x-a)^2}+\cdots+\frac{\chi(m)}{(x-a)^m}.$$

Cela posé, on obtiendra aisément

$$\begin{aligned}\varphi'(0)&=-\tfrac{1}{2}\delta'\psi(2)-\varepsilon'\psi(3)\\ \varphi'(1)&=\ \ \tfrac{1}{2}\delta'\psi(1)\\ \varphi'(2)&=\ \ \varepsilon'.\psi(1)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}\chi(p)=-\alpha'(p-1)\psi(p-1)-\beta'(p-\tfrac{1}{2})\psi(p)-\gamma'p.\psi(p+1)\\ -\delta'(p+\tfrac{1}{2})\psi(p+2)-\varepsilon'(p+1)\psi(p+3)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (f)$$

Faisons

$$\varphi'(0)+\varphi'(1).(x-a)+\varphi'(2).(x-a)^2=\varphi(0)+\varphi(1)x+\varphi(2).x^2,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}&\varphi(0)=\varphi'(0)-a\varphi'(1)+a^2.\varphi'(2)=-\varepsilon'\psi(3)-\tfrac{1}{2}\delta'\psi(2)-(\tfrac{1}{2}a\delta'-\varepsilon'a^2).\psi(1)\\ &\varphi(1)=\varphi'(1)-2a\varphi'(2)=(\tfrac{1}{2}\delta'-2a\varepsilon').\psi(1)\\ &\varphi(2)=\varphi'(2)=\varepsilon.\psi(1),\end{aligned}$$

ou bien, en substituant les valeurs de δ' et ε',

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(0)=-(\tfrac{1}{2}a\delta+\varepsilon a^2).\psi(1)-\tfrac{1}{2}(\delta+4a\varepsilon).\psi(2)-\varepsilon.\psi(3)\\ &\varphi(1)=\tfrac{1}{2}\delta.\psi(1)\\ &\varphi(2)=\ \ \varepsilon.\psi(1)\end{aligned}\right\}\ \ldots.\ (g)$$

13. Si l'on multiplie la valeur de S par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$, et qu'on prenne ensuite l'intégrale de chaque membre, on obtiendra en substituant la valeur de Q:

$$\left.\begin{aligned}&\varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}\\ &+\chi(1).\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+\chi(2).\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}+\cdots+\chi(m)\int\frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}}\\ &=\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a}+\frac{\psi(2)}{(x-a)^2}+\frac{\psi(3)}{(x-a)^3}+\cdots+\frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right)\end{aligned}\right\}\ \ldots\ (h)$$

Il est clair que par cette équation on peut toujours réduire l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$, si non $m=1$; car elle suppose évidemment $m>1$. $\int\frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}}$ peut donc être exprimée par les trois intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et par l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$; mais celle-ci est en général absolument irréductible. Je dis en

général; car il est possible qu'on pourrait déterminer les quantités a, α, β, γ, δ ε, de la manière qu'elle devient réductible, ce qui a effectivement lieu, comme on le verra ci-après.

En faisant dans l'équation (h) $\chi(m) = -1$, $\chi(2) = \chi(3) = \chi(4) = \ldots = \chi(m-1) = 0$, on obtiendra

$$\left.\begin{aligned}\int\frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}} = \varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \chi(1).\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}\\ -\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \frac{\psi(3)}{(x-a)^3} + \ldots + \frac{\psi(m-1)}{(x-a)^{m-1}}\right)\end{aligned}\right\} . \text{(i)}$$

14. Pour déterminer les coefficiens, faisons dans l'équation (f) $p = 1, 2, 3, \ldots m$, et nous aurons les équations suivantes:

$$\begin{aligned}
\chi(1) &= -\tfrac{1}{2}\beta'.\psi(1) - \gamma'\psi(2) - \tfrac{3}{2}\delta'.\psi(3) - 2\varepsilon'\psi(4)\\
0 &= \alpha'.\psi(1) + \tfrac{3}{2}\beta'.\psi(2) + 2\gamma'\psi(3) + \tfrac{5}{2}\delta'\psi(4) + 3\varepsilon'\psi(5)\\
0 &= 2\alpha'.\psi(2) + \tfrac{5}{2}\beta'.\psi(3) + 3\gamma'\psi(4) + \tfrac{7}{2}\delta'\psi(5) + 4\varepsilon'\psi(6)\\
0 &= 3\alpha'.\psi(3) + \tfrac{7}{2}\beta'.\psi(4) + 4\gamma'\psi(5) + \tfrac{9}{2}\delta'\psi(6) + 5\varepsilon'\psi(7)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= (m-3)\alpha'.\psi(m-3) + (m-\tfrac{5}{2})\beta'.\psi(m-2) + (m-2)\gamma'\psi(m-1)\\
0 &= (m-2)\alpha'.\psi(m-2) + (m-\tfrac{3}{2})\beta'.\psi(m-1)\\
1 &= (m-1)\alpha'.\psi(m-1).
\end{aligned}$$

En éliminant on trouvera:

$$\begin{aligned}
\psi(m-1) &= \frac{1}{m-1}\cdot\frac{1}{\alpha'}\\
\psi(m-2) &= -\frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-1)\,(m-2)}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'^2}\\
\psi(m-3) &= \frac{(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})}{(m-1)(m-2)(m-3)}\cdot\frac{\beta'^2}{\alpha'^3} - \frac{(m-2)}{(m-1)\,(m-3)}\cdot\frac{\gamma'}{\alpha'^2}.
\end{aligned}$$

Pour exprimer le coefficient général, faisons $R = f(x)$. On tire de là

$$\alpha' = f(a),\ \beta' = \frac{df(a)}{da},\ \gamma' = \frac{d^2f(a)}{2.da^2},\ \delta' = \frac{d^3f(a)}{2.3.da^2},\ \varepsilon' = \frac{d^4f(a)}{2.3.4.da^4}.$$

Cela posé, on aura en général

$$\left.\begin{aligned}\psi(m-p) = \Sigma\frac{(-1)^n}{(fa)^{n+3}}\cdot\frac{\left(m-\frac{k+1}{2}\right)\left(m-\frac{k'+k}{2}\right)\ldots\left(m-\frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}}{2}\right)\left(m-\frac{k^{(n)}+p}{2}\right)}{(m-1)\,(m-k)\,(m-k')\ldots(m-k^{(n)})\,(m-p)}\\ \times\frac{d^{k-1}f(a)}{1.2.3.(k-1)da^{k-1}}\cdot\frac{d^{k'-k}f(a)}{1.2\ldots(k'-k)da^{k'-k}}\ldots\frac{d^{p-k^{(n)}}a}{1.2\ldots(p-k^{(n)})da^{p-k^{(n)}}}\end{aligned}\right\}\text{(k)}$$

la characteristique Σ ayant la même signification que dans l'équation (d).

Ayant ainsi trouvé $\psi(m-p)$, on aura $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ par les équations (g) et $\chi(1)$ par l'équation

$$\chi(1) = -\tfrac{1}{2}f'(a).\psi(1) - \frac{f''(a)}{1.2}.\psi(2) - \tfrac{3}{2}.\frac{f'''(a)}{1.2.3}.\psi(3) - 2.\frac{f''''(a)}{1.2.3.4}.\psi(4) \quad . \; . \; (l)$$

15. Prenons comme exemple $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$.

On a $m=2$, donc

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} = \varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \chi(1).\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$-\sqrt{R}.\frac{\psi(1)}{x-a}$$

$$\psi(1) = \frac{1}{f(a)} = \frac{1}{\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4}.$$

$$\chi(1) = -\tfrac{1}{2}f'(a).\psi(1) = -\tfrac{1}{2}.\frac{f'(a)}{f(a)} = -\tfrac{1}{2}.\frac{\beta+2\gamma a+3\delta a^2+4\varepsilon a^3}{\alpha+\beta a+\gamma a^2+\delta a^3+\varepsilon a^4}$$

$$\varphi(0) = -(\tfrac{1}{2}a\delta+\varepsilon a^2).\frac{1}{f(a)}$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}\delta.\frac{1}{f(a)}$$

$$\varphi(2) = \frac{\varepsilon}{f(a)}.$$

En substituant ces valeurs, on obtiendra

$$\int\frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{fx}} = -\frac{(\varepsilon a^2+\frac{1}{2}\delta a)}{fa}.\int\frac{dx}{\sqrt{fx}} + \frac{\delta}{2fa}.\int\frac{xdx}{\sqrt{fx}} + \frac{\varepsilon}{fa}.\int\frac{x^2dx}{\sqrt{fx}}$$
$$-\tfrac{1}{2}\frac{f'a}{fa}.\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{fx}} - \frac{\sqrt{fx}}{(x-a).fa}.$$

Si $a=0$, on a

$$\int\frac{dx}{x^2\sqrt{R}} = \frac{\delta}{2\alpha}.\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \frac{\varepsilon}{\alpha}.\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}} - \tfrac{1}{2}.\frac{\beta}{\alpha}.\int\frac{dx}{x\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{R}}{\alpha x}.$$

16. Par la forme qu'on a trouvée pour les quantités $\psi(1)$, $\psi(2)$ etc. il est évident que l'équation (i) peut toujours être employée, si non $\alpha'=0$; mais dans ce cas elle devient illusoire à cause des coefficiens infinis. Il faut donc considérer ce cas séparement. Or α' étant $=0$, on a $\chi(m)=0$, donc l'équation (h) prend la forme suivante.

$$\varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\chi(1).\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \chi(2).\int\frac{dx}{(x-a)^2.\sqrt{R}} + \ldots + \chi(m).\int\frac{dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}}$$
$$=\sqrt{R}\left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m}\right)$$

où l'on a mis $m+1$ à la place de m.

Dans cette équation on peut faire $m = 1$. Donc il est dans ce cas toujours possible d'exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m . \sqrt{R}}$ par les trois intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$.

Pour achever la réduction, faisons $\chi(m) = -1$, $\chi(1) = \chi(2) = \chi(3) =$ etc. $= 0$. Par là on obtiendra:

$$\left.\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x-a)^m . \sqrt{R}} &= \varphi(0) . \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) . \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) . \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \\ &- \sqrt{R} \left(\frac{\psi(1)}{x-a} + \frac{\psi(2)}{(x-a)^2} + \ldots + \frac{\psi(m)}{(x-a)^m} \right. \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

En faisant maintenant dans l'équation (f) $p = 1, 2, 3 \ldots m$, on obtiendra les équations suivantes:

$$0 = \tfrac{1}{2}\beta' . \psi(1) + \gamma' . \psi(2) + \tfrac{3}{2}\delta' . \psi(3) + 2\varepsilon' . \psi(4)$$
$$0 = \tfrac{3}{2}\beta' . \psi(2) + 2\gamma' . \psi(3) + \tfrac{5}{2}\delta' . \psi(4) + 3\varepsilon' . \psi(5)$$
$$0 = \tfrac{5}{2}\beta' . \psi(3) + 3\gamma' . \psi(4) + \tfrac{7}{2}\delta' . \psi(5) + 4\varepsilon' . \psi(6)$$

. . . .

$$0 = (m-\tfrac{7}{2})\beta'\psi(m-3) + (m-3)\gamma' . \psi(m-2) + (m-\tfrac{5}{2})\delta' . \psi(m-1) + (m-2)\varepsilon' . \psi(m)$$
$$0 = (m-\tfrac{5}{2})\beta'\psi(m-2) + (m-2)\gamma' . \psi(m-1) + (m-\tfrac{3}{2})\delta' . \psi(m)$$
$$0 = (m-\tfrac{3}{2})\beta'\psi(m-1) + (m-1)\gamma' . \psi(m)$$
$$1 = (m-\tfrac{1}{2})\beta'\psi(m).$$

De ces équations on tirera en éliminant:

$$\psi(m) = \frac{1}{(m-\frac{1}{2})\beta'}$$
$$\psi(m-1) = -\frac{(m-1)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})} \cdot \frac{\gamma'}{\beta'^2}$$
$$\psi(m-2) = \frac{(m-1)(m-2)}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{3}{2})(m-\frac{5}{2})} \cdot \frac{\gamma'^2}{\beta'^2} - \frac{(m-\frac{3}{2})}{(m-\frac{1}{2})(m-\frac{5}{2})} \cdot \frac{\delta'}{\beta'^2}$$

etc.

Le coefficient général peut s'exprimer de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} \psi(m-p) = \Sigma \frac{(-1)^n}{(f'a)^{n+3}} \cdot \frac{\left(m - \frac{k}{2}\right)\left(m - \frac{k'+k-1}{2}\right) \cdots \left(m - \frac{k^{(n)}+k^{(n-1)}-1}{2}\right)\left(m - \frac{k^{(n)}+p}{2}\right)}{(m-\frac{1}{2})(m+\frac{1}{2}-k)(m+\frac{1}{2}-k') \ldots (m+\frac{1}{2}-k^{(n)})(m-p-\frac{1}{2})} \\ \times \frac{d^k fa}{1.2..k da^k} \cdot \frac{d^{k'-k+1} fa}{1.2..(k'-k+1) da^{k'-k+1}} \cdots \frac{d^{p-k^{(n)}+1} fa}{1.2..(p-k^{(n)}+1) da^{p-k^{(n)}+1}} \end{aligned}\right\} \text{(m)}$$

17. L'équation (1') a lieu si $\alpha' = 0$, c'est-à-dire si $\alpha + \beta a + \gamma a^2 + \delta a^3 + \varepsilon a^4 = 0$. Il suit de là que $x - a$ est facteur de R. Donc:

"Toutes les fois que $x - a$ est facteur de R, on peut exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)^m . \sqrt{R}}$ par les trois intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$. Dans tout autre cas cela est impossible, car l'équation (h) suppose $m > 1$."

Proposons nous de réduire l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, $x - a$ étant facteur de R. Comme $m = 1$, on a

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = \varphi(0) . \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1) . \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \varphi(2) . \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \sqrt{R} . \frac{\psi(1)}{x-a}.$$

L'équation (m) donne $\psi(1) = \frac{1}{\frac{1}{2} f'a} = \frac{2}{f'a}$

et les équations (g)

$$\varphi(0) = -(\varepsilon a^2 + \tfrac{1}{2}\delta a)\psi(1) = -\frac{(2\varepsilon a^2 + \delta a)}{f'a}$$

$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}\delta . \psi(1) = \frac{\delta}{f'a}$$

$$\varphi(2) = \varepsilon . \psi(1) = \frac{2\varepsilon}{f'a}.$$

En substituant ces valeurs on obtiendra:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = -\frac{(2\varepsilon a^2 + a\delta)}{f'a} . \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{\delta}{f'a} . \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} + \frac{2\varepsilon}{f'a} . \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{f'a} . \frac{\sqrt{R}}{x-a}.$$

Soit $R = (x - a)(x - a')(x - a'')(x - a''') = f(x)$,

on aura

$$\delta = -(a + a' + a'' + a'''),\ \varepsilon = 1,\ f'(x) = (x - a')(x - a'')(x - a''') + \dots$$
$$f'a = (a - a')(a - a'')(a - a''').$$

En faisant ces substitutions on aura:

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = -\frac{a^2 + a(a' + a'' + a''')}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} . \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{a + a' + a'' + a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} . \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} . \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} - \frac{2}{(a-a')(a-a'')(a-a''')} . \frac{\sqrt{R}}{x-a}.$$

18. Cherchons maintenant à trouver une relation entre des intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Pour cela faisons

$$\varphi(0) . \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1) . \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2) . \int \frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} + \text{etc.} = Q\sqrt{R}$$

En différentiant, on voit aisément que la forme la plus générale qu'on puisse donner à Q, est de supposer

$$Q = \frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \frac{A'''}{x-a'''}$$

$x-a$, $x-a'$, $x-a''$, $x-a'''$ étant les quatre facteurs de R.

On a donc

$$\varphi(0).\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} + \varphi(3).\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}}$$
$$= \sqrt{R}\left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''} + \frac{A'''}{x-a'''}\right);$$

ou bien en substituant les valeurs de $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ etc. trouvées plus haut:

$$-\left(\varphi(0).\frac{2\varepsilon a^2+a\delta}{f'a} + \varphi(1).\frac{2\varepsilon a'^2+a'\delta}{f'a'} + \varphi(2).\frac{2\varepsilon a''^2+a''\delta}{f'a''} + \varphi(3).\frac{2\varepsilon a'''^2+a'''\delta}{f'a'''}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$$
$$+\left(\frac{\delta.\varphi(0)}{f'a} + \frac{\delta.\varphi(1)}{f'a'} + \frac{\delta.\varphi(2)}{f'a''} + \frac{\delta.\varphi(3)}{f'a'''}\right)\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} + \left(\frac{2\varepsilon.\varphi(0)}{f'a} + \frac{2\varepsilon.\varphi(1)}{f'a'} + \frac{2\varepsilon.\varphi(2)}{f'a''} + \frac{2\varepsilon.\varphi(3)}{f'a'''}\right).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$
$$= \sqrt{R}\left\{\frac{A + \frac{2\varphi(0)}{f'a}}{x-a} + \frac{A' + \frac{2\varphi(1)}{f'a'}}{x-a'} + \frac{A'' + \frac{2\varphi(2)}{f'a''}}{x-a''} + \frac{A''' + \frac{2\varphi(3)}{f'a'''}}{x-a'''}\right\}.$$

On a donc

$$A = -\frac{2\varphi(0)}{f'a},\quad A' = -\frac{2\varphi(1)}{f'a'},\quad A'' = -\frac{2\varphi(2)}{f'a''},\quad A''' = -\frac{2\varphi(3)}{f'a'''},$$
$$A(2\varepsilon a^2 + a\delta) + A'(2\varepsilon a'^2 + a'\delta) + A''(2\varepsilon a''^2 + a''\delta) + A'''(2\varepsilon a'''^2 + a'''\delta) = 0,$$
$$A + A' + A'' + A''' = 0.$$

On voit par là qu'on peut faire une quelconque des quantités A, A' etc. $= 0$. Soit par exemple $A''' = 0$, on aura

$$A'' = -A - A'$$
$$A.\left(2\varepsilon(a^2 - a''^2) + \delta(a - a'')\right) + A'\left(2\varepsilon(a'^2 - a''^2) + \delta(a' - a'')\right) = 0;$$

donc

$$A' = -\frac{2\varepsilon(a^2-a''^2)+\delta(a-a'')}{2\varepsilon(a'^2-a''^2)+\delta(a'-a'')}.A = 2\varepsilon(a^2 - a''^2) + \delta(a - a'') = (a - a'')(a + a'' - a' - a''')$$

en faisant $\quad A = 2\varepsilon(a''^2 - a'^2) + \delta(a'' - a') = (a'' - a')(a'' + a' - a - a''')$,

et de là $\quad A'' = 2\varepsilon(a'^2 - a^2) + \delta(a' - a) = (a' - a)(a' + a - a'' - a''')$.

On en déduit

$$\varphi(0) = \tfrac{1}{2}(a - a')(a - a'')(a - a''')(a' - a'')(a' + a'' - a - a''')$$
$$\varphi(1) = \tfrac{1}{2}(a' - a)(a' - a'')(a' - a''')(a'' - a)(a + a'' - a' - a''')$$
$$\varphi(2) = \tfrac{1}{2}(a'' - a)(a'' - a')(a'' - a''')(a - a')(a + a' - a'' - a''')$$

$$\varphi(0).\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \varphi(1).\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + \varphi(2).\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} = \sqrt{R}.\left(\frac{A}{x-a} + \frac{A'}{x-a'} + \frac{A''}{x-a''}\right) \quad \text{(n)}$$

Cette équation contient, comme on voit, une relation entre trois quelconques des quatre intégrales

$$\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}},\quad \int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}},$$

d'où il suit qu'on en peut déterminer deux par les deux autres.

19. Proposons-nous maintenant de trouver les relations qui doivent exister entre les quantités $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ pour que l'expression

$$\varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

soit réductible à des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

On voit aisément par ce qui précède que $x-a$ doit être un facteur de R. On peut donc à cause de l'équation (n) faire:

$$\varphi(0).\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\varphi(1).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}+\varphi(2).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$$

$$=A.\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+A'.\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\sqrt{R}.\left(\frac{B}{x-a}+\frac{B'}{x-a'}\right).$$

En substituant les valeurs de $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$ données par l'équation du No. 17 on obtiendra:

$$\left(\varphi(0)+A.\frac{2\varepsilon a^2+a\delta}{f'a}+A'.\frac{2\varepsilon a'^2+a'\delta}{f'a'}\right).\int\frac{dx}{\sqrt{R}}+\left(\varphi(1)-A.\frac{\delta}{f'a}-A'.\frac{\delta}{f'a'}\right).\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$$

$$+\left(\varphi(2)-A.\frac{2\varepsilon}{f'a}-A'.\frac{2\varepsilon}{f'a'}\right).\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}-\sqrt{R}.\left\{\frac{B+\frac{2A}{f'a}}{x-a}+\frac{B'+\frac{2A'}{f'a'}}{x-a}\right\}=0.$$

On a donc:

$$A=-\tfrac{1}{2}B.f'a,\quad A'=-\tfrac{1}{2}B'.f'a'$$
$$\varphi(0)-\tfrac{1}{2}B(2\varepsilon a^2+a\delta)-\tfrac{1}{2}B'(2\varepsilon a'^2+a'\delta)=0$$
$$\varphi(1)+\tfrac{1}{2}\delta(B+B')=0$$
$$\varphi(2)+\quad\varepsilon(B+B')=0.$$

En éliminant $B+B'$ entre les deux dernières équations on aura:

$$2\varepsilon.\varphi(1)-\delta.\varphi(2)=0,\ \text{d'où}\ \varphi(2)=\frac{2\varepsilon}{\delta}.\varphi(1).$$

Voilà donc la relation qui doit avoir lieu entre $\varphi(2)$ et $\varphi(1)$.

En faisant $\varphi(1)=0$ et $\varphi(0)=1$, on aura

$$\varphi(2)=0,\ B'=-B,\ 1=\tfrac{1}{2}B\big(2\varepsilon(a^2-a'^2)+\delta(a-a')\big)$$

$$B=\frac{2}{(a-a')(a+a'-a''-a''')}=-B'.$$

Donc en substituant:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{(a-a'')(a-a''')}{(a''+a'''-a-a')} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \frac{(a'-a'')(a'-a''')}{(a''+a'''-a-a')} \cdot \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{2\sqrt{R}}{(a+a'-a''-a''')(x-a)(x-a')}.$$

Si l'on fait $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(2) = 1$, on aura:

$$\varphi(1) = \frac{\delta}{2\varepsilon},\ B' = -B - \frac{1}{\varepsilon}$$

$$B\big(2\varepsilon(a^2 - a'^2) + \delta(a - a') - \Big(2a'^2 + a' \cdot \frac{\delta}{\varepsilon}\Big) = 0$$

d'où l'on tire

$$B = \frac{a'(a'-a-a''-a''')}{(a+a'-a''-a''')(a-a')}$$

$$B' = \frac{a(a-a'-a''-a''')}{(a+a'-a''-a''')(a'-a)}.$$

En substituant ces valeurs on obtiendra:

$$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \tfrac{1}{2}\delta \int \frac{xdx}{\sqrt{R}} = \frac{a'(a'-a-a''-a''').f'a}{2(a'-a)(a+a'-a''-a''')} \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{a(a-a'-a''-a''').f'a'}{2(a-a')(a+a'-a''-a''')} \cdot \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{\sqrt{R}}{(a-a')(a+a'-a''-a''')} \cdot \Big(\frac{a'(a'-a-a''-a''')}{x-a} - \frac{a(a-a'-a''-a''')}{x-a'}\Big).$$

20. Par ce qui précède on voit qu'on peut exprimer $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ par les l'intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$; mais cela n'a pas lieu par rapport aux intégrales $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$. C'est seulement l'expression $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{R}} + \frac{\delta}{2} \int \frac{xdx}{\sqrt{R}}$ qu'on peut exprimer de cette manière. Dans le cas où $a + a' = a'' + a'''$ les deux équations du numéro précédent deviennent illusoires, et alors c'est seulement l'équation du numéro 17 qui peut avoir lieu. Dans ce même cas on peut trouver une relation entre deux des intégrales $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ etc. Savoir en multipliant une des équations du numéro précédent par $a + a' - a'' - a'''$ on obtiendra

$$(a - a'')(a - a''') \cdot \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + (a' - a'')(a' - a''') \cdot \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} = - \frac{2\sqrt{R}}{(x-a)(x-a')};$$

ou bien, puisque $a - a''' = a'' - a'$ et $a' - a''' = a'' - a$,

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \int \frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} = \frac{2\sqrt{R}}{(a''-a)(a''-a')(x-a)(x-a')}$$
$$R = (x - a)(x - a')(x - a'')(x - a - a' + a'').$$

21. Nous avons maintenant épuisé le sujet de ce chapitre, savoir de réduire l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ autant que possible par des fonctions algébriques, et nous avons donné des équations par lesquelles on peut avec toute la facilité possible réduire une intégrale proposée quelconque de la forme précédente.

Reprenons les résultats généraux

1. Lorsque P est une fonction algébrique et entière de x, $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ est toujours réductible aux intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$.

2. Lorsque P est une fonction fractionnaire de x, l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ est réductible aux intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et à des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

3. Lorsque $x-a$ est un facteur de R, l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)^m\sqrt{R}}$ est réductible aux intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$, mais dans tout autre cas cela est impossible.

4. Il est impossible de trouver une relation entre plusieurs intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ si non $x-a$ est un facteur de R, mais alors on peut trouver une relation entre trois intégrales de cette forme; si de plus $a+a'=a''+a'''$, on peut trouver une relation entre deux d'elles.

5. L'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ peut s'exprimer par deux intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, $x-a$ étant un facteur de R, si non $a+a'=a''+a'''$. Les intégrales $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$ et $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ au contraire ne peuvent pas être exprimées de cette manière

CHAPITRE II.

Réduction de l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ *par des fonctions logarithmiques.*

22. Dans le chapitre précédent nous avons réduit l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ par des fonctions algébriques, et nous avons trouvé que son intégration exige les quatre fonctions suivantes $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$, $\int\frac{x^2dx}{\sqrt{R}}$ et $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, qui en

général sont irréductibles par des fonctions algébriques. Dans ce chapitre nous chercherons les relations qu'on peut obtenir entre ces quatres intégrales par des fonctions logarithmiques. Pour cela il faut trouver la fonction logarithmique la plus générale, dont la différentielle est décomposable en termes de la forme

$$\frac{Ax^n.dx}{\sqrt{R}}, \quad \frac{A.dx}{(x-a)^m.\sqrt{R}};$$

car en intégrant la différentielle ainsi décomposée et faisant usage des réductions du chapitre précédent, on obtiendra la relation la plus générale qu'on puisse trouver par des fonctions logarithmiques entre les quatre intégrales proposées.

23. On peut se convaincre aisément que la fonction logarithmique cherchée doit avoir la forme suivante:

$$T = A.\log(P+Q\sqrt{R}) + A'.\log(P'+Q'\sqrt{R})$$
$$+ A''.\log(P''+Q''\sqrt{R}) + \ldots + A^{(n)}.\log(P^{(n)}+Q^{(n)}\sqrt{R})$$

P, Q, P', Q' etc. étant des fonctions entières de x et A, A' etc. des coefficiens constants.

Considérons un terme quelconque $T = A.\log(P+Q\sqrt{R})$. En différentiant on aura:

$$dT = A.\frac{dP + dQ\sqrt{R} + \frac{1}{2}.\frac{QdR}{\sqrt{R}}}{P+Q\sqrt{R}}$$

ou bien, en multipliant en haut et en bas par $P - Q\sqrt{R}$,

$$dT = A.\frac{PdP-Q(RdQ+\frac{1}{2}QdR)}{P^2-Q^2R} + A.\frac{\frac{1}{2}PQdR+(PdQ-QdP)R}{(P^2-Q^2R).\sqrt{R}}$$

d'où l'on tire

$$T = \frac{A}{2}\log(P^2-Q^2R) + A\int\frac{\frac{1}{2}PQdR+(PdQ-QdP)R}{(P^2-Q^2R).\sqrt{R}}.$$

Il est aisé de voir qu'on peut faire abstraction du premier terme de dT qui est rationnel, et qui donne dans la valeur de T le terme $\frac{A}{2}.\log(P^2 - Q^2R)$; en retranchant donc ce terme de T, il restera

$$A.\log(P+Q\sqrt{R}) - \frac{A}{2}\log(P^2-Q^2R) = \frac{A}{2}\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

On peut donc faire

$$T' = A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right) + A'.\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}\right) + \ldots$$

La différentielle de cette expression ne contient aucune partie rationnelle: et on aura en différentiant:

$$dT' = A.\frac{PQdR + 2(PdQ - QdP)R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} + A'.\frac{P'Q'dR + 2(P'dQ' - Q'dP')R}{(P'^2 - Q'^2R)\sqrt{R}} + \text{etc.}$$

$$= S'.\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Pour trouver S', considérons le terme

$$A.\frac{PQdR + 2(PdQ - QdP).R}{(P^2 - Q^2R)\sqrt{R}} = \frac{M}{N}.\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

De là on tire

$$\frac{M}{N} = A.\frac{PQ.\frac{dR}{dx} + 2\left(P\frac{dQ}{dx} - Q.\frac{dP}{dx}\right).R}{P^2 - Q^2R}.$$

En différentiant $N = P^2 - Q^2R$ on aura

$$dN = 2PdP - 2QdQ.R - Q^2dR,$$

d'où
$$PdN = 2P^2dP - 2PQdQ.R - Q^2P.dR,$$

et en substituant pour P^2 sa valeur $N + Q^2R$,

$$PdN = 2NdP + 2Q^2RdP - 2PQR.dQ - Q^2P.dR;$$

c'est-à-dire:

$$\frac{2N.\frac{dP}{dx} - P.\frac{dN}{dx}}{Q} = \frac{PQ.dR + 2(PdQ - QdP).R}{dx};$$

donc:
$$M = A.\frac{2N.\frac{dP}{dx} - P.\frac{dN}{dx}}{Q},\ N = P^2 - Q^2R.$$

24. Par la valeur qu'on vient de trouver pour M, on voit que si $(x-a)^m$ est un diviseur de N, $(x-a)^{m-1}$ doit être diviseur de M; donc $\frac{M}{N}$ ne peut contenir aucun terme de la forme $\frac{B}{(x-a)^m}$, m étant plus grand que l'unité. Les termes fractionnaires contenus dans la fonction $\frac{M}{N}$ sont donc tous de la forme $\frac{B}{x-a}$. Si de plus $x-a$ était un facteur de R, il le serait aussi de P, donc dans ce cas M et N auraient $x-a$ pour facteur commun. Donc $\frac{M}{N}$ ne peut contenir aucun terme de la forme $\frac{B}{x-a}$, $x-a$ étant un facteur de R.

Pour trouver la forme de la partie entière de $\frac{M}{N}$, supposons que P est un polynome du degré m, et Q du degré n.

Il faut distinguer trois cas

1. si $m > n + 2$, 2. si $m < n + 2$, 3. si $m = n + 2$.

1. Si $m > n + 2$, N est du degré $2m$, et M du degré $m + n + 3$, donc $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 0, donc la seule partie entière qui peut y être contenue, est une quantité constante.

2. Si $m < n + 2$, N est du degré $2n + 4$, et M du degré $n + m + 3$, donc $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 0, et par conséquent sa partie entière une constante.

3. Si $m = n + 2$, N peut être d'un degré quelconque moindre que $2m$. Soit donc N du degré μ, on voit que M est tout au plus du degré $\mu + m - 1 - n = \mu + 1$, si non $\mu = 2n + 4$: car alors M est du degré μ et $\frac{M}{N}$ du degré 0. Donc dans ce cas, $\frac{M}{N}$ est tout au plus du degré 1, et sa partie entière de la forme $Bx + B'$.

De ce qui précède il suit que $\frac{M}{N}$ est toujours de la forme

$$\frac{M}{N} = Bx + B' + \frac{C}{x-a} + \frac{C'}{x-a'} + \frac{C''}{x-a''} + \ldots$$

$x - a$, $x - a'$, $x - a''$, ... n'étant point des facteurs de R.

De là il suit que l'intégrale $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$ est absolument irréductible dans tous les cas; elle constitue donc une fonction transcendante particulière. D'après la valeur de $\frac{M}{N}$ il est aisé de conclure que $\frac{dT'}{dx}$ a la même forme.

Soit donc

$$\frac{dT'}{dx} = \left(k + k'x + \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'} + \frac{L''}{x-a''} + \ldots + \frac{L^{(\nu)}}{x-a^{(\nu)}}\right) \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}},$$

d'où

$$T' = k . \int \frac{dx}{\sqrt{R}} + k' . \int \frac{x dx}{\sqrt{R}} + L . \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + \ldots + L^{(\nu)} \int \frac{dx}{(x-a^{(\nu)})\sqrt{R}} .$$

Voilà donc la relation la plus générale qu'on puisse trouver entre les intégrales proposées.

25. Pour appliquer l'équation précédente, je vais résoudre les cinq problèmes suivants:

1. Exprimer les deux intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et $\int \frac{(x+c) . dx}{\sqrt{R}}$ par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

2. Réduire l'intégrale $\int\frac{Pdx}{\sqrt{R}}$ au plus petit nombre possible d'intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, P étant une fonction algébrique fractionnaire de x, et l'intégrale décomposable en termes de la forme $\int\frac{dx}{(x-c).\sqrt{R}}$.

3. Quel est le nombre le plus petit d'intégrales elliptiques entre lesquelles on peut trouver une relation.

4. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int\frac{(k+k'.x)dx}{\sqrt{R}}$ qui sont intégrables par des logarithmes.

5. Trouver toutes les intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ qui peuvent s'exprimer par les intégrales $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et $\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}$ au moyen des logarithmes.

Problème Ier.

Exprimer l'intégrale $\int\frac{(k+k').x}{\sqrt{R}}$ *par le plus petit nombre possible d'intégrales de la forme* $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

26. Soient $P, Q, P', Q', P'', Q'', \ldots P^{(r)}, Q^{(r)}$ respectivement du degré $m, n, m', n', m'', n'', \ldots m^{(r)}, n^{(r)}$, ces quantités contiennent $m+n+m'+n'\ldots+m^{(r)}+n^{(r)}+r+1$ coefficiens indéterminés. De plus les coefficiens A, $A', \ldots A^{(r)}$ sont au nombre de $r+1$. On a donc en tout $m+n+m'+n'\ldots+m^{(r)}+n^{(r)}+2r+2=\alpha'$ coefficiens indéterminés.

Supposons que des quantités $m, m', m''\ldots m^{(r)}$ on a

$$m=n+2,\ m'=n'+2,\ \text{etc. } m^{(p-1)}=n^{(p-1)}+2$$
$$m^{(p)}>n^{(p)}+2,\ m^{(p+1)}>n^{(p+1)}+2 \text{ etc. } m^{(p+p'-1)}>n^{(p+p'-1)}+2$$
$$m^{(p+p')}<n^{(p+p')}+2,\ \text{etc. } m^{(r)}<n^{(r)}+2.$$

Il suit de là que

N est du degré $2m$
N' . . . . $2m'$
N'' . . . . $2m''$
. . . .
$N^{(p-1)}$ . . . . . $2m^{(p-1)}$
$N^{(p)}$ . . . . . . $2m^{(p)}$
. . . .

$$\begin{array}{lll} N^{(p+p'-1)} & \text{est du degré} & 2m^{(p+p'-1)} \\ N^{(p+p')} & \ldots\ldots\ldots & 2n^{(p+p')}+4 \\ N^{(p+p'+1)} & \ldots\ldots\ldots & 2n^{(p+p'+1)}+4 \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ N^{(r)} & \ldots\ldots\ldots & 2n^{(r)}+4. \end{array}$$

De là on voit que

$$A.\frac{M}{N}+A'.\frac{M'}{N'}+A''.\frac{M''}{N''}+\ldots+A^{(r)}.\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}$$

$$=k+k'x+\frac{C+C_1x+C_2x^2+\ldots+C_{\nu'}x^{\nu'}}{D+D_1x+D_2x^2+\ldots+D_{\nu}x^{\nu}}=S$$

où $\nu=2m+2m'+2m''+\ldots+2m^{(p+p'-1)}+2n^{(p+p')}+2n^{(p+p'+1)}+\ldots+2n^{(r)}$
$+4(r-p-p'+1)$ et $\nu'<\nu$.

Puisqu'on a α' coefficiens indéterminés, on peut faire en sorte que S devienne de la forme:

$$S=k+k'x+\frac{C+C_1x+\ldots+C_{\nu-\alpha'+1}.x^{\nu-\alpha'+1}}{D+D_1x+\ldots+D_{\nu-\alpha'+2}.x^{\nu-\alpha'+2}},$$

k et k' étant quelconques.

On peut donc exprimer $\int\frac{(k+k'x)dx}{\sqrt{R}}$ par $\nu-\alpha'+2$ intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Il faut maintenant déterminer m, n, m', n' etc. et r de manière que la quantité $\nu-\alpha'+2$ devienne aussi petite que possible.

On a $$\alpha'=2m+2m'+2m''+\ldots+2m^{(p-1)}-2p$$
$$+m^{(p)}+n^{(p)}+m^{(p+1)}+n^{(p+1)}+\ldots+n^{(r)}+2r+2.$$

Donc $$\nu-\alpha'+2=m^{(p)}+m^{(p+1)}+m^{(p+2)}+\ldots+m^{(p+p'-1)}$$
$$-n^{(p)}-n^{(p+1)}-n^{(p+2)}-\ldots-n^{(p+p'-1)}$$
$$-m^{(p+p')}-m^{(p+p'+1)}-\ldots\ldots-m^{(r)}$$
$$+n^{(p+p')}+n^{(p+p'+1)}+\ldots\ldots+n^{(r)}$$
$$+4(r-p-p'+1)-2r+2p.$$

On voit sans peine que cette expression devient la plus petite, en faisant $p'=0$ et $r=p-1$. On obtiendra donc $\nu-\alpha'+2=2$, r restant arbitraire.

Il suit de là qu'on peut faire:

$$A.\frac{M}{N}+A'.\frac{M'}{N'}+\ldots+A^{(r)}.\frac{M^{(r)}}{N^{(r)}}=k+k'x+\frac{C+C_1x}{D+D_1x+D_2x^2}$$
$$=k+k'x+\frac{L}{x-a}+\frac{L'}{x-a'}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et intégrant, on aura

$$\int\frac{(k+k'x).dx}{\sqrt{R}}=T'-L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}-L'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}.$$

27. Comme r est arbitraire, il est le plus simple de faire $r=0$ ce qui donne

$$T'=A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

De plus, comme n est arbitraire, soit $n=0$, d'où $m=n+2=2$.

Faisons donc

$$P=f+f^{(1)}.x+f^{(2)}.x^2,\ \text{et}\ Q=1;$$

on aura $$N=P^2-Q^2R=(f+f^{(1)}.x+f^{(2)}.x^2)^2-R,$$

$$M=A\left(2N.\frac{dP}{dx}-P.\frac{dN}{dx}\right)=A.\left(P.\frac{dR}{dx}-2R.\frac{dP}{dx}\right)$$

Soit $$N=D+D_1x+D_2x^2,$$

on aura
$$D=f^2-\alpha,$$
$$D_1=2ff^{(1)}-\beta,$$
$$D_2=f^{(1)2}+2ff^{(2)}-\gamma,$$
$$0=2f^{(1)}.f^{(2)}-\delta,$$
$$0=f^{(2)2}-\varepsilon.$$

De ces équations on tire $f^{(2)}=\sqrt{\varepsilon}$, $f^{(1)}=\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}$.

On a de plus

$$M=A.\left(2(D+D_1x+D_2x^2)(f^{(1)}+2f^{(2)}x)-(D_1+2D_2x)(f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2)\right)$$
$$=C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3.$$

On tire de là
$$C=2ADf^{(1)}-AD_1f$$
$$C_1=4ADf^{(2)}+AD_1f^{(1)}-2AD_2f,$$
$$C_2=3AD_1f^{(2)}=3AD_1\sqrt{\varepsilon},$$
$$C_3=2AD_2f^{(2)}=2AD_2\sqrt{\varepsilon}.$$

Donc

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{C_3}{D_2}x+\frac{C_2D_2-C_3D_1}{D^2_2}+\frac{C'+C'_1x}{D+D_1x+D_2x^2},$$

où l'on a fait pour abréger

$$\frac{C_1D_2 - C_3D}{D_2} - \frac{D_1(C_2D_2 - C_3D_1)}{D_2^2} = C'_1$$

$$\text{et} \quad C - \frac{D.(C_2D_2 - C_3D_1)}{D_2^2} = C'.$$

Soit $$\frac{C_3}{D_2} = k', \text{ et } \frac{C_2D_2 - C_3D_1}{D_2^2} = k.$$

On aura en substituant les valeurs de C_3, C_2, D_2 et D_1

$$\frac{2AD_2\sqrt{\varepsilon}}{D_2} = 2A\sqrt{\varepsilon} = k', \text{ donc } A = \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$k = \frac{AD_1\sqrt{\varepsilon}}{D_2} = \frac{k'}{2}\cdot\frac{D_1}{D_2} = \frac{k_\prime}{2}\cdot\frac{2ff^{(1)} - \beta}{f^{(1)2} + 2ff^{(2)} - \gamma}.$$

En substituant les valeurs de $f^{(1)}$ et de $f^{(2)}$ on en tirera

$$f = \frac{k(\delta^2 - 4\varepsilon\gamma) + 2k'\varepsilon\beta}{2(\delta k' - 4\varepsilon k).\sqrt{\varepsilon}}.$$

Connaissant f on aura

$$D = f^2 - \alpha,$$

$$D_1 = \frac{\delta}{\sqrt{\varepsilon}}.f - \beta,$$

$$D_2 = \frac{\delta^2}{4\varepsilon}. + 2f\sqrt{\varepsilon} - \gamma,$$

$$C'_1 = k\beta - k'\alpha - \frac{k'\delta\beta}{4\varepsilon} - \frac{k\delta - k'\gamma}{\sqrt{\varepsilon}}f - k'f^2$$

$$C' = \alpha k - \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon}.k' + \frac{k'\beta}{2\sqrt{\varepsilon}}.f - kf^2.$$

Soit maintenant

$$\frac{C' + C'_1x}{D + D_1x + D_2x^2} = \frac{L}{x-a} + \frac{L'}{x-a'},$$

on obtiendra:

$$\int\frac{(k + k'x)\,dx}{\sqrt{R}} = -L.\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - L'.\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}$$

$$+ \frac{k'}{2\sqrt{\varepsilon}}\log\left\{\frac{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 + \sqrt{R}}{f + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 - \sqrt{R}}\right\},$$

qui est la réduction demandée.

28. Appliquons cette équation au cas où $k = 0$ et $k' = 1$.

Dans ce cas on aura

$$f = \frac{\beta}{\delta}.\sqrt{\varepsilon}$$

$$D = \frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{\delta^2}$$

$$D_1 = 0$$
$$D_2 = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta} - \gamma$$
$$C' = \frac{\beta^2}{2\delta} - \frac{\alpha\delta}{2\varepsilon}$$
$$C'_1 = -\alpha - \frac{\beta\delta}{4\varepsilon} - \frac{\beta^2\varepsilon}{\delta^2} + \frac{\beta\gamma}{\delta};$$

donc

$$\frac{C' + C'_1 x}{D + D_1 x + D_2 x^2} = \frac{\frac{C'_1}{D_1} . x + \frac{C'}{D_2}}{x^2 + \frac{D}{D_2}} = \frac{L}{x - \sqrt{-\frac{D}{D_2}}} + \frac{L'}{x + \sqrt{-\frac{D}{D_2}}}$$

où l'on trouvera

$$L = \tfrac{1}{2}\frac{C'_1}{D_2} + \tfrac{1}{2}C'.\sqrt{-\frac{1}{DD_2}}$$
$$L' = \tfrac{1}{2}\frac{C'_1}{D_2} - \tfrac{1}{2}C'.\sqrt{-\frac{1}{DD_2}}.$$

En substituant ces valeurs on obtiendra

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{R}} = (G + H\sqrt{K})\int\frac{dx}{(x-\sqrt{K})\sqrt{R}} + (G - H\sqrt{K})\int\frac{dx}{(x+\sqrt{K})\sqrt{R}}$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}}.\log\left\{\frac{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 + \sqrt{R}}{\frac{\beta}{\delta}\sqrt{\varepsilon} + \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x + \sqrt{\varepsilon}.x^2 - \sqrt{R}}\right\}$$

où
$$G = \frac{4\alpha\delta^2\varepsilon + \beta\delta^3 + \beta^2\varepsilon^2 - 4\beta\gamma\delta\varepsilon}{2(\delta^4 + 8\beta\delta\varepsilon^2 - 4\gamma\delta^2\varepsilon)}$$
$$H = \frac{\delta}{4\varepsilon}\left(\frac{\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2}{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}\right)$$
$$K = \frac{4\varepsilon}{\delta}\left(\frac{\varepsilon\beta^2 - \alpha\delta^2}{4\gamma\delta\varepsilon - 8\beta\varepsilon^2 - \delta^3}\right).$$

29. Il faut considérer séparement les cas dans lesquels quelques-uns des coefficiens K, G, H deviennent infinis.

Si $D_2 = 0$, on aura

$$\frac{M}{N} = \frac{C + C_1 x + C_2 x^2}{D + D_1 x} = \frac{C_2}{D_1}x + \frac{C_1 D_1 - DC_2}{D^2_1} + \frac{C - D.\frac{C_1 D_1 - C_2 D}{D^2_1}}{D + D_1 x}$$
$$C = 2AD.f^{(1)} - AD_1 f = A\left(\frac{D\delta}{\sqrt{\varepsilon}} - D_1 f\right)$$
$$C_1 = 4AD.f^{(2)} + AD_1 f^{(1)} = A\left(4D\sqrt{\varepsilon} + \frac{D_1\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}\right)$$

$$\frac{\delta^2}{4\varepsilon}+2f\sqrt{\varepsilon}-\gamma=0, \text{ donc } f=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\frac{C_2}{D_1}=k', \ \frac{C_1D_1-C_2D}{D^2_1}=k, \text{ donc } k'=3A\sqrt{\varepsilon}, \ A=\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}.$$

On trouvera $k=\frac{k'}{6}\cdot\frac{\delta}{\varepsilon}+\frac{k'}{3}\cdot\frac{D}{D_1}$. Soit $\frac{D}{D_1}=\mu$, on aura

$$\mu=\frac{6k\varepsilon-k'\delta}{2k'\varepsilon},$$

$$\frac{M}{N}=k'x+k+\frac{C-Dk}{D+D_1x}=k'x+k+\frac{\frac{C}{D_1}-\frac{D}{D_1}.k}{\frac{D}{D_1}+x};$$

or $$\frac{C}{D_1}=-Af+\frac{A}{\sqrt{\varepsilon}}\cdot\frac{D}{D_1}=-\frac{k'.f}{3\sqrt{\varepsilon}}+\frac{k'}{3\varepsilon}.\mu;$$

donc $$\frac{M}{N}=k'x+k+\frac{\left(\frac{k'}{3\varepsilon}-k\right)\mu-\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}.f}{x+\mu};$$

on trouvera de plus

$$\mu=\frac{f^2-\alpha}{f\delta-\beta\sqrt{\varepsilon}}\cdot\sqrt{\varepsilon}.$$

D'après la valeur de $\frac{M}{N}$ il suit qu'on a

$$\int\frac{(k+k_{,}x)dx}{\sqrt{R}}=\left[\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}.f-\left(\frac{k'}{3\varepsilon}-k\right)\mu\right]\cdot\int\frac{dx}{(x+\mu).\sqrt{R}}$$
$$+\frac{k'}{3\sqrt{\varepsilon}}.\log\left\{\frac{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x+\sqrt{\varepsilon}.x^2+\sqrt{R}}{f+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x+\sqrt{\varepsilon}.x^2-\sqrt{R}}\right\},$$

où l'on a

$$f=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon.\sqrt{\varepsilon}},$$
$$\mu=\frac{6k\varepsilon-k'\delta}{2k'\varepsilon}=\frac{(f^2-\alpha)\sqrt{\varepsilon}}{f\delta-\beta\sqrt{\varepsilon}}.$$

Si l'on fait $k=0$, $k'=1$, on aura

$$\int\frac{xdx}{\sqrt{R}}=\frac{1}{3\varepsilon}(\mu'-\mu)\int\frac{dx}{(x+\mu)\sqrt{R}}$$
$$+\frac{1}{3\sqrt{\varepsilon}}.\log\left\{\frac{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x+\sqrt{\varepsilon}.x^2+\sqrt{R}}{\frac{\mu'}{\sqrt{\varepsilon}}+\frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}}.x+\sqrt{\varepsilon}.x^2-\sqrt{R}}\right\}$$

où $$\mu'=\frac{4\varepsilon\gamma-\delta^2}{8\varepsilon}, \ \mu=-\frac{\delta}{2\varepsilon}=\frac{\mu'^2-\alpha\varepsilon}{\mu'\delta-\beta\varepsilon}.$$

On a donc la relation suivante entre les coefficiens α, β, γ, δ, ε

$$(4\varepsilon\gamma-\delta^2)^2+4\delta^2(4\varepsilon\gamma-\delta^2)-32\beta\delta\varepsilon^2-64\alpha\varepsilon^3=0.$$

50. Dans ce qui précède nous avons réduit $\frac{M}{N}$ à la forme

$\frac{C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3}{D+D_1x+D_2x^2}$ en faisant $P^2-Q^2R=D+D_1x+D_2x^2$.

On peut aussi le faire de la manière suivante

Soit
$$R=(p+qx+rx^2)(p'+q'x+x^2)$$
$$P=f(p'+q'x+x^2),\ Q=1,$$

on aura

$$N=P^2-Q^2R=f^2(p'+q'x+x^2)^2-(p'+q'x+x^2)(p+qx+rx^2)$$

ou bien

$$N=(p'+q'x+x^2)(f^2(p'+q'x+x^2)-(p+qx+rx^2)).$$

Soit
$$N=(p'+q'x+x^2)(D+D_1x+D_2x^2),$$

on aura
$$D=f^2p'-p$$
$$D_1=f^2q'-q$$
$$D_2=f^2-r.$$

Or
$$M=A\left(P.\frac{dR}{dx}-2R.\frac{dP}{dx}\right);$$

donc
$$M=A(p'+q'x+x^2)\left(f\cdot\frac{dR}{dx}-2(p+qx+rx^2).\frac{dP}{dx}\right)$$

c'est-à-dire

$$M=A(p'+q'x+x^2)(f\beta+2f\gamma x+3f\delta x^2+4f\varepsilon x^3-2(p+qx+rx^2)(fq'+2fx).$$

Soit
$$M=(p'+q'x+x^2)(C+C_1x+C_2x^2+C_3x^3),$$

on en tirera
$$C=A(f\beta-2fpq')$$
$$C_1=A(2f\gamma-4fp-2fqq')$$
$$C_2=A(3f\delta-4fq-2frq')$$
$$C_3=A(4f\varepsilon-4fr)=0 \text{ à cause de } r=\varepsilon.$$

Puisque $C_3=0$, on voit qu'il est impossible de réduire l'intégrale $\int\frac{(k+x)dx}{\sqrt{R}}$ de cette manière, mais comme f par là devient arbitraire on peut le déterminer de manière que $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$ soit réductible à une seule intégrale de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

Pour cela faisons $D+D_1x+D_2x^2=D_2(x-a)^2$,

d'où il suit que $D_1^2=4DD_2$.

En substituant les valeurs de D, D_1, D_2 on obtiendra

$$(f^2q'-q)^2=4(f^2p'-p)(f^2-r)$$

c'est-à-dire

$$f^4(q'^2-4p')-f^2(2qq'-4p-4p'r)+q^2-4pr=0.$$

Cette équation servira à déterminer f. Connaissant f on aura aussi D, D_1, D_2 et a.

Comme M doit être divisible par $x-a$, soit

$$C+C_1x+C_2x^2=(x-a)(k+k'x);$$

de là on tire

$$C=-ak,\ C_1=k-ak',\ C_2=k',$$

et en éliminant les quantités k et k'

$$C_1=-\frac{C}{a}-aC_2;$$

savoir $C_2a^2+C_1a+C=0$, d'où l'on tire la valeur de a, savoir

$$a=-\frac{C_1}{2C_2}\pm\sqrt{\left(\frac{C^2_1}{4C^2_2}-C.\right)}.$$

On a

$$\frac{M}{N}=\frac{C+C_1x+C_2x^2}{D+D_1x+D_2x^2}=\frac{(k+k'x)(x-a)}{D_2(x-a)^2};$$

donc

$$\frac{M}{N}=\frac{k+k'x}{D_2(x-a)}=\frac{k'}{D_2}+\frac{k+ak'}{D_2(x-a)},$$

Soit $\frac{k'}{D_2}=1$, on aura $k'=D_2$, donc $D_2=C_2$;

où bien, en substituant les valeurs de ces quantités,

$$f^2-r=A.(3f\delta-4fq-2frq'),$$

d'où l'on tire

$$A=\frac{f^2-r}{f(3\delta-4q-2rq')};$$

or $$\delta=rq'+q;$$

donc $$A=\frac{f^2-r}{f(rq'-q)}.$$

Nous avons trouvé $k=-\frac{C}{a}$, donc en substituant

$$k=-\frac{Af}{a}(\beta-2pq'),\ \text{or}\ \beta=pq'+p'q,$$

donc $$k=\frac{Af}{a}(pq'-qp')=\frac{(f^2-r)(pq'-qp')}{a(rq'-q)},$$

$$D_2=f^2-r$$

donc $$\frac{k}{D_2}=\frac{pq'-qp'}{a(rq'-q)}$$

et $\quad \left(\frac{k}{D_2} + a \cdot \frac{k'}{D_2}\right) = \left(a + \frac{pq' - qp'}{a(rq' - q)}\right) = \frac{pq' - qp' + (rq' - q)a^2}{(rq' - q)a} = L.$

En substituant cette valeur dans l'expression de $\frac{M}{N}$, on obtiendra

$$\frac{M}{N} = 1 + L.\frac{1}{x-a},$$

donc $\quad \int \frac{dx}{\sqrt{R}} = -L.\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + A.\log\left(\frac{f(p'+q'x+x^2)+\sqrt{R}}{f(p'+q'x+x^2)-\sqrt{R}}\right),$

où

$$R = (p + qx + rx^2)(p' + q'x + x^2),$$

$$L = \frac{pq' - qp' + (rq' - q).a^2}{(rq' - q)a},$$

$$A = \frac{f^2 - r}{f(rq' - q)}, \quad a = \frac{q - q'f^2}{2(f^2 - r)},$$

$$f^4(q'^2 - 4p') - f^2(2qq' - 4p - 4p'r) + q^2 - 4pr = 0.$$

31. Appliquons cette formule au cas où $r = 1$, $q' = -q$ et $p' = p$. On aura

$$R = (p + qx + x^2)(p - qx + x^2)$$

$$f^4(q^2 - 4p) + f^2(2q^2 + 8p) + q^2 - 4p = 0.$$

On tire de là $\quad f = \frac{q \pm 2\sqrt{p}}{\sqrt{(4p - q^2)}}.$

On a $\quad a = \frac{q - q'f^2}{2(f^2 - r)} = -\frac{1 + f^2}{1 - f^2} \cdot \frac{q}{2}.$

En substituant ici la valeur de f, et réduisant on trouvera

$$a = \pm\sqrt{p}.$$

On aura de même

$$A = \frac{f^2 - r}{f(rq' - q)} = \frac{1 - f^2}{2fq} = -\frac{1}{\sqrt{(4p - q^2)}}.$$

La valeur de L donne

$$L = \frac{p}{a} + a = \pm 2\sqrt{p}.$$

En substituant les valeurs trouvées, on obtiendra

$$\int \frac{dx}{\sqrt{[(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)]}} = 2\sqrt{p}\int \frac{dx}{(x-\sqrt{p})\sqrt{[(p+qx+x^2)(p-qx+x^2)]}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(4p-q^2)}}.\log\left\{\frac{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{(4p-q^2)}}.\sqrt{(p-qx+x^2)}+\sqrt{(p+qx+x^2)}}{\frac{q+2\sqrt{p}}{\sqrt{(4p-q^2)}}.\sqrt{(p-qx+x^2)}-\sqrt{(p+qx+x^2)}}\right\}.$$

32. On peut par la supposition de $P = f + f^{(1)}x + f^{(2)}x^2$ réduire l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ de plusieurs autres manières, savoir en faisant les suppositions suivantes:

$$R = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4$$
$$P = f + f'x + f''x^2.$$

1. $N = P^2 - R = k(x-a)^4$.
2. $N = P^2 - R = k(x+p)(x-a)^3$, $x+p$ étant facteur de R.
3. $N = P^2 - R = k(x^2+px+q)(x-a)^2$, x^2+px+q étant facteur de R.

Le troisième cas est celui que nous avons traité; considérons encore le premier.

On a

$$(f + f'x + f''x^2)^2 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4) = k(x-a)^4,$$

donc

$$\begin{aligned} f^2 - \alpha &= ka^4 \\ 2ff' - \beta &= -4ka^3 \\ f'^2 + 2ff'' - \gamma &= 6ka^2 \\ 2f'f'' - \delta &= -4ka \\ f''^2 - \varepsilon &= k. \end{aligned}$$

Par ces équations on peut déterminer les cinq quantités k, a, f, f', f''; mais on peut les trouver plus facilement de la manière suivante.

Soit $$R = \varepsilon.(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''').$$

En substituant dans l'équation

$$f + f'x + f''x^2 = \sqrt{(k.(x-a)^4 + R)}$$

pour x les valeurs p, p', p'', p''', on obtiendra

$$\begin{aligned} f + pf' + p^2 f'' &= (p-a)^2.\sqrt{k} \\ f + p'f' + p'^2 f'' &= i.(p'-a)^2.\sqrt{k} \\ f + p''f' + p''^2 f'' &= i'.(p''-a)^2.\sqrt{k} \\ f + p'''f' + p'''^2 f'' &= i''.(p'''-a)^2.\sqrt{k}. \end{aligned}$$

i, i' et i'' désignant le double signe $\pm$.

De là on tire

$$(p-p')f' + (p^2-p'^2).f'' = ((p-a)^2 - i(p'-a)^2).\sqrt{k}.$$

En divisant par $p-p'$, on aura

$$f' + (p+p').f'' = \frac{(p-a)^2 - i(p'-a)^2}{p-p_{,}}.\sqrt{k}.$$

De la même manière

$$f' + (p+p'').f'' = \frac{(p-a)^2 - i'(p''-a)^2}{p-p''}.\sqrt{k},$$

$$f' + (p+p''').f'' = \frac{(p-a)^2 - i''(p'''-a)^2}{p-p'''}.\sqrt{k}.$$

De ces èquations on tire de même

$$(p'-p'').f''=(p-a)^2\left(\frac{1}{p-p'}-\frac{1}{p-p''}\right).\sqrt{k}-\left(\frac{i(p'-a)^2}{p-p'}-\frac{i'(p''-a)^2}{p-p''}\right)\sqrt{k}$$

d'où

$$f''=\left(\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p'')}-\frac{i(p'-a)^2}{(p-p')(p'-p'')}+\frac{i'(p''-a)^2}{(p-p'')(p'-p'')}\right).\sqrt{k}.$$

De la même manière

$$f''=\left(\frac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p''')}-\frac{i(p'-a)^2}{(p-p')(p'-p''')}+\frac{i''(p'''-a)^2}{(p-p''')(p'-p''')}\right).\sqrt{k}.$$

Donc enfin

$$\left.\begin{array}{l}(p-a)^2.\left(\dfrac{1}{(p-p')(p-p'')}-\dfrac{1}{(p-p')(p-p''')}\right)\\ -i(p'-a)^2.\left(\dfrac{1}{(p-p')(p'-p'')}-\dfrac{1}{(p-p')(p'-p''')}\right)\\ +\dfrac{i'(p''-a)^2}{(p-p'')(p'-p'')}-\dfrac{i''(p'''-a)^2}{(p-p''')(p'-p''')}\end{array}\right\}=0$$

ou bien

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{(p-a)^2}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\dfrac{i.(p'-a)^2}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\ +\dfrac{i'.(p''-a)^2}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\dfrac{i''.(p'''-a)^2}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{array}\right\}=0.$$

Donc

$$C-2C_1a+C_2a^2=0$$

où

$$C=\frac{p^2}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{ip'^2}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\text{etc.}$$

$$C_1=\frac{p}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{ip'}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\text{etc.}$$

$$C_2=\frac{1}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{i}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\text{etc.}$$

Quant à la valeur de i de i' et de i'', on ne peut faire que $i=1$, $i'=-1$, $i''=-1$, car dans tout autre cas on aura $f''=\sqrt{k}$, ce qui donne $\varepsilon=0$.

Soit donc $i=1$, $i'=-1$ et $i''=-1$, on trouvera sans peine

$$C=-2.\frac{pp'.(p''+p''')-p''p'''.(p+p')}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')}$$

$$C_1=-2.\frac{pp'-p''p'''}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')}$$

$$C_2=-2.\frac{p+p'-p''-p'''}{(p-p'')(p-p''')(p'-p'')(p'-p''')}$$

donc

$$(p+p'-p''-p''').a^2-2(pp'-p''p''').a+pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')=0.$$

Connaissant a, on aura

$$f''=\frac{p+p'+p''+p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}.\sqrt{k};$$

donc l'équation $f''^2-\varepsilon=k$ devient

$$\left[\left(\frac{p+p'+p''+p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}\right)^2-1\right]k=\varepsilon=1, \text{ en faisant } \varepsilon=1,$$

donc
$$k=\frac{(p+p'-p''-p''')^2}{[2(p''+p''')-4a][2(p+p')-4a]},$$

$$f''=\sqrt{(1+k)}=\frac{p+p'+p''+p'''-4a}{\sqrt{[2(p+p')-4a][2(p''+p''')-4a]}},$$

$$f=\sqrt{(pp'p''p'''+ka^4)},$$

$$f'=-\frac{p+p'+p''+p'''+4ka}{2\sqrt{(1+k)}}.$$

Il reste maintenant à déterminer A et L.

On a
$$M=A\left(2N.\frac{dP}{dx}-P.\frac{dN}{dx}\right),$$

donc
$$M=-Ak(x-a)^3(2af'+4f+(2f'+4af'')x),$$

et par suite

$$\frac{M}{N}=-\frac{[A(2af'+4f)+A(2f'+4af'')x]}{x-a}$$

$$=A(2f'+4af'')+\frac{A(2af'+4f)+Aa(2f'+4af'')}{x-a}$$

$$=1-\frac{L}{x-a};$$

donc
$$A=\frac{1}{2(f'+2af'')}$$

$$L=-\frac{2(f+af'+a^2f'')}{f'+2af''},$$

ou bien

$$A=-\frac{1}{2\sqrt{[(p+p'-2a)(p''+p'''-2a)]}}$$

$$L=2\sqrt{\left(\frac{(a-p)(a-p')(a-p'')(a-p''')}{[2a-(p+p')][2a-(p''+p''')]}\right)}.$$

Connaissant ces valeurs, on aura:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')]}}=L.\int\frac{dx}{(x-a).\sqrt{[(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')]}}$$
$$+A.\log\left(\frac{f+f'x+f''x^2+\sqrt{[(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')]}}{f+f'x+f''x^2-\sqrt{[(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')]}}\right).$$

33. Appliquons cette équation aux cas suivants:

$$1.\quad p' = -p,\ p''' = -p''.$$
$$2.\quad p'' = -p,\ p''' = -p'.$$

Dans le premier cas on aura

$$A = -\frac{1}{4a},\quad L = \frac{\sqrt{[(a^2-p^2)(a^2-p''^2)]}}{a},$$
$$f'' = -1,\ f' = 0,\ f = pp'',\ a = 0.$$

Donc A et L sont infinis.

Dans le second cas, on aura

$$a = \sqrt{pp'}$$
$$A = -\tfrac{1}{2}.\frac{1}{\sqrt{[(4a^2-(p+p')^2]}} = \frac{1}{2(p-p')\sqrt{-1}},\quad L = 2\sqrt{pp'},$$
$$f'' = \frac{2\sqrt{pp'}}{(p-p')\sqrt{-1}},\quad f' = -\frac{(p+p')^2}{(p-p')\sqrt{-1}},\quad f = \frac{2pp'\sqrt{pp'}}{(p-p')\sqrt{-1}}.$$

Donc

$$P = \frac{1}{(p-p')\sqrt{-1}}\left(2pp'\sqrt{pp'} - (p+p')^2.x + 2\sqrt{pp'}.x^2\right).$$

Donc $$A.\log\left(\frac{P+\sqrt{R}}{P-\sqrt{R}}\right) = \frac{1}{p-p'}.\text{arc tg.}\frac{\sqrt{R}}{P.\sqrt{-1}},$$

et enfin

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[(x^2-p^2)(x^2-p'^2)]}} = 2\sqrt{pp'}\int\frac{dx}{(x-\sqrt{pp'})\sqrt{[(x^2-p^2)(x^2-p'^2)]}}$$
$$-\frac{1}{p-p'}.\text{arc tg.}\left(\frac{(p-p').\sqrt{[(x^2-p^2)(x^2-p'^2)]}}{2pp'\sqrt{pp'}-(p+p')^2.x+2\sqrt{pp'}.x^2}\right).$$

On a $$(x^2-p^2)(x^2-p'^2) = (x-p)(x-p')(x+p)(x+p')$$
$$= \left(x^2-(p+p')x+pp'\right)\left(x^2+(p+p')x+pp'\right).$$

Soit $p+p' = q$, et $pp' = r$, on aura:

$$p^2 - qp + r = 0,$$
$$p = \tfrac{1}{2}q + \tfrac{1}{2}\sqrt{(q^2-4r)},\ p' = \tfrac{1}{2}q - \tfrac{1}{2}\sqrt{(q^2-4r)}$$
$$p - p' = \sqrt{(q^2-4r)},\ \sqrt{pp'} = \sqrt{r}.$$

Donc

$$\int\frac{dx}{\sqrt{[(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)]}} = 2\sqrt{r}\int\frac{dx}{(x-\sqrt{r})(\sqrt{[(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)]}}$$
$$-\frac{1}{\sqrt{(q^2-4r)}}.\text{arc tg.}\left(\frac{\sqrt{(q^2-4r)}.\sqrt{[(x^2+qx+r)(x^2-qx+r)]}}{2r\sqrt{r}-q^2x+2\sqrt{r}.x^2}\right):$$

la même formule qu'on a trouvée plus haut, mais sous une autre forme.

34. Il est a remarquer qu'on peut toujours supposer que P n'a aucun facteur commun avec R; car soit $R = R'.r$ et $P = P'r$, on aura:

$$\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)=\log\left(\frac{P'r+Q.\sqrt{R'r}}{P'r-Q.\sqrt{R'r}}\right)$$
$$=\log\left(\frac{P'.\sqrt{r}+Q\sqrt{R'}}{P'.\sqrt{r}-Q\sqrt{R'}}\right)=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{(P'\sqrt{r}+Q\sqrt{R'})^2}{(P'\sqrt{r}-Q\sqrt{R'})^2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{P'^2r+Q^2R'+2P'Q\sqrt{rR'}}{P'^2r+Q^2R'-2P'Q\sqrt{rR'}}\right)=\tfrac{1}{2}\log\left(\frac{P''+Q'\sqrt{R}}{P''-Q'\sqrt{R}}\right),$$

dans laquelle expression $P''=P'^2r+Q^2R'$ et $Q'=2P'Q$; et il est visible que P'' n'a point de facteurs communs avec R; donc etc.

Voilà la raison par laquelle nous avons trouvé la même formule de réduction pour l'intégrale $\int\frac{dx}{\sqrt{R}}$, soit en supposant P facteur de R, soit non. Néanmoins il est utile de supposer P facteur de R, car les calculs deviennent par là plus simples.

Problème II.

trouver les conditions nécessaires pour que

$$\int\frac{x^m+k^{(m-1)}.x^{m-1}+\ldots+k'x+k}{x^m+l^{(m-1)}.x^{m-1}+\ldots+l'x+l}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

55. On peut se convaincre aisément par un raisonnement analogue à celui qu'on a employé dans le probléme précédent, qu'on doit faire

$$Q=e+e^{(1)}.x+e^{(2)}..x^2+\ldots+e^{(n-1)}.x^{n-1}+x^n$$
$$P=f+f^{(1)}.x+f^{(2)}.x^2+\ldots+f^{(n+1)}.x^{n+1}+f^{(n+2)}..x^{n+2}$$

n étant un nombre entier quelconque qui satisfait à la condition:

$$2n+4>m.$$

Soit $x^m+l^{(m-1)}.x^{m-1}+\ldots+l'x+l=(x-a)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(m-1)})$.

Pour que $\frac{M}{N}$ soit réductible à la forme:

$$\frac{x^m+k^{(m-1)}.x^{m-1}+\ldots+k}{x^m+l^{(m-1)}.x^{m-1}+\ldots+l}=\frac{M'}{(x-a)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(m-1)})}$$

il est clair, selon ce qu'on a vu précédemment, qu'on doit faire

$$N=P^2-Q^2R=C(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'}(x-a'')^{\mu''}\ldots(x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}}=C.S\quad(1)$$

où $$2n+4=\mu+\mu'+\mu''+\ldots+\mu^{(m-1)}.$$

Il s'agit maintenant de satisfaire à cette équation.

Première méthode.

56. Supposons que $(x-a)^{\mu}(x-a')^{\mu'}\ldots(x-a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}}$

$$=g+g^{(1)}.x+g^{(2)}.x^2+\ldots+g^{(2n+3)}.x^{2n+3}+x^{2n+4},$$

on aura

$$P^2 - Q^2 R = C(g + g^{(1)}.x + g^{(2)}.x^2 + \ldots + g^{(2n+3)}.x^{2n+3} + x^{2n+4})$$
$$= (f + f^{(1)}.x + f^{(2)}.x^2 + \ldots + f^{(n+2)}.x^{n+2})^2$$
$$-(e + e^{(1)}.x + e^{(2)}.x^2 + \ldots + e^{(n-1)}.x^{n-1} + x^n)^2.(\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4).$$

En développant et comparant les coefficiens on trouvera l'équation générale:

$$\left.\begin{array}{l} ff^{(p)} + f^{(1)}f^{(p-1)} + f^{(2)}f^{(p-2)} + f^{(3)}f^{(p-3)} + \text{etc.} \\ -\alpha(ee^{(p)} + e^{(1)}e^{(p-1)} + e^{(2)}e^{(p-2)} + e^{(3)}e^{(p-3)} + \ldots) \\ -\beta(ee^{(p-1)} + e^{(1)}e^{(p-2)} + e^{(2)}e^{(p-3)} + e^{(3)}e^{(p-4)} + \ldots) \\ -\gamma(ee^{(p-2)} + e^{(1)}e^{(p-3)} + e^{(2)}e^{(p-4)} + e^{(3)}e^{(p-5)} + \ldots) \\ -\delta(ee^{(p-3)} + e^{(1)}e^{(p-4)} + e^{(2)}e^{(p-5)} + e^{(3)}e^{(p-6)} + \ldots) \\ -\varepsilon(ee^{(p-4)} + e^{(1)}e^{(p-5)} + e^{(2)}e^{(p-6)} + e^{(3)}e^{(p-7)} + \ldots) \end{array}\right\} = \tfrac{1}{2}C.g^{(p)} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

En faisant dans cette équation successivement $p = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots 2n+3, 2n+4$ on obtiendra $2n+5$ équations et ces $2n+5$ équations contiennent les conditions qui résultent de l'équation (1).

On peut par ces équations déterminer les coefficiens e, $e^{(1)}$ etc. f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc. en fonction de C, a, a', a'', etc.

Déterminons maintenant la valeur de $g^{(p)}$.

En prenant le logarithme on a:

$$\log(g + g^{(1)}.x + g^{(2)}.x^2 + \ldots + x^{2n+4}) = \mu \log(x-a) + \mu' \log(x-a') + \ldots$$

donc en différentiant

$$\frac{g^{(1)} + 2g^{(2)}.x + \ldots + (2n+4).x^{2n+3}}{g + g^{(1)}.x + g^{(2)}.x^2 + \ldots + x^{2n+4}} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \ldots$$

donc

$$g^{(1)} + 2g^{(2)}.x + \ldots + (2n+4)x^{2n+3} = \mu.\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}.x^{2n+3} + \ldots + g^{(1)}.x + g}{x-a}$$
$$+ \mu'.\frac{x^{2n+4} + g^{(2n+3)}.x^{2n+3} + \ldots + g^{(1)}.x + g}{x-a'}$$
$$+ \mu''.\frac{x^{2n+1} + g^{(2n+3)}.x^{2n+3} + \ldots + g^{(1)} + g}{x-a''}$$
$$+ \text{etc.}$$

Le coefficient de $x^{(p)}$ dans $\dfrac{S}{x-a}$ est $= -\left(\dfrac{g^{(p)}}{a} + \dfrac{g^{(p-1)}}{a^2} + \dfrac{g^{(p-2)}}{a^3} + \ldots + \dfrac{g}{a^{p+1}}\right)$.

Donc il est aisé de voir qu'on aura

$$\left.\begin{array}{l} g^{(p)}\cdot\left(\frac{\mu}{a}+\frac{\mu'}{a'}+\frac{\mu''}{a''}+\ldots\right) \\ +g^{(p-1)}\cdot\left(\frac{\mu}{a^2}+\frac{\mu'}{a'^2}+\frac{\mu''}{a''^2}+\ldots\right) \\ +g^{(p-2)}\cdot\left(\frac{\mu}{a^3}+\frac{\mu'}{a'^3}+\frac{\mu''}{a''^3}+\ldots\right) \\ +\text{etc.} \\ +g^{(1)}\cdot\left(\frac{\mu}{a^p}+\frac{\mu'}{a'^p}+\frac{\mu''}{a''^p}+\ldots\right) \\ +g\;\cdot\left(\frac{\mu}{a^{p+1}}+\frac{\mu'}{a'^{p+1}}+\frac{\mu''}{a''^{p+1}}+\ldots\right) \end{array}\right\} = -(p+1)\cdot g^{(p+1)} \ldots\ldots (3)$$

En faisant $p=0$, 1, 2, 3 etc. on déterminera aisément les quantités $g^{(1)}$, $g^{(2)}$, etc. par g, et celle-ci est égale à $a^{\mu}.a'^{\mu'}.a''^{\mu''}\ldots(a^{(m-1)})^{\mu^{(m-1)}}$.

Seconde méthode

37. Soit $P=Fx$, $Q=fx$, $R=\varphi x$,

on aura d'abord, en faisant $x=a$, a', a'', etc. les m équations suivantes:

$$\begin{array}{l} (Fa)^2-(fa)^2.\varphi a=0 \\ (Fa')^2-(fa')^2.\varphi a'=0 \\ (Fa'')^2-(fa'')^2.\varphi a''=0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (Fa^{(m-1)})^2-(fa^{(m-1)})^2.\varphi a^{(m-1)}=0. \end{array}$$

De ces équations on tire:

$$\left.\begin{array}{l} Fa=\pm fa.\sqrt{(\varphi a)}=i.fa.\sqrt{(\varphi a)} \\ Fa'=\pm fa'.\sqrt{(\varphi a')}=i'.fa'.\sqrt{(\varphi a')} \\ Fa''=\pm fa''\sqrt{(\varphi a'')}=i''.fa''.\sqrt{(\varphi a'')} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Fa^{(m-1)}=\pm fa^{(m-1)}.\sqrt{(\varphi a^{(m-1)})}=i^{(m-1)}.fa^{(m-1)}.\sqrt{(\varphi a^{(m-1)})} \end{array}\right\}\ldots\ldots(4)$$

En différentiant la première $\mu-1$ fois, la seconde $\mu'-1$ fois etc. on obtiendra par rapport à a des équations, qui deviennent toutes de la forme:

$$d^p.Fa=\pm\left(d^pfa.\sqrt{(\varphi a)}+pd^{p-1}fa.d\sqrt{(\varphi a)}+\frac{p(p-1)}{2}d^{p-2}Fa.d^2\sqrt{(\varphi a)}+\text{etc.}+fa.d^p\sqrt{(\varphi a)}\right)\;(5)$$

On aura des équations semblables par rapport à a', a'', etc. et en faisant dans toutes ces équations

$$p=0, 1, 2, 3, 4\ldots\mu$$
$$p=0, 1, 2, 3, 4\ldots\mu'$$

$$p = 0, 1, 2, 3, 4 \ldots \mu''$$
etc.

on obtiendra les équations nécessaires pour déterminer e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, etc. f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc.

Ces équations ont l'avantage d'être linéaires par rapport à e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, ... f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc. ce qui facilite beaucoup la détermination de ces quantités.

58. Il reste maintenant à trouver les coefficiens k, k', k'', ... etc. et A. On a

$$M = A.\frac{\left(2N.\frac{dP}{dx} - P.\frac{dN}{dx}\right)}{Q}$$

et
$$\frac{M}{N} = A.\frac{\left(2.\frac{dP}{dx} - P.\frac{dN}{Ndx}\right)}{Q};$$

or
$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{\mu}{x-a} + \frac{\mu'}{x-a'} + \frac{\mu''}{x-a''} + \frac{\mu'''}{x-a'''} + \text{etc.}$$

donc
$$\frac{dN}{Ndx} = \frac{h + h^{(1)}.x + h^{(2)}.x^2 + h^{(3)}.x^3 + \ldots + h^{(m-1)}.x^{m-1}}{l + l^{(1)}.x + l^{(2)}.x^2 + l^{(3)}.x^3 + \ldots + l^{(m-1)}.x^{m-1} + x^m} = \frac{t}{S},$$

et
$$\frac{M}{N} = A.\frac{\left(2.\frac{dP}{Qdx}.S - \frac{P.t}{Q}\right)}{S} = \frac{k + k^{(1)}.x + k^{(2)}.x^2 + \ldots k^{(m-1)}.x^{m-1} + x^m}{S};$$

donc

$$k + k^{(1)}.x + k^{(2)}.x^2 + \ldots + k^{(m-1)}.x^{m-1} + x^m = A.\frac{2\frac{dP}{dx}.S - P.t}{Q} \ldots . (6)$$

En développant le second membre on aura aisément les valeurs des coefficiens k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, etc. et A.

Ces coefficiens peuvent aussi être déterminés comme il suit.

Soit $x = a$, on aura $S = 0$ et $t = \mu(a-a')(a-a'')(a-a''') \ldots$ etc. donc

$$k + k^{(1)}.a + k^{(2)}.a^2 + k^{(3)}.a^3 + \ldots + a^m = -\mu A.\frac{Fa}{fa}.(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots \text{etc.}$$

or
$$\frac{Fa}{fa} = \pm\sqrt{(\varphi a)} = i.\sqrt{(\varphi a)};$$

donc $k + k^{(1)}.a + k^{(2)}.a^2 + \ldots + a^m = -i\mu A.\sqrt{\varphi}.(a-a')(a-a'')\ldots$

ou bien, en supposant $t = \psi x$,

$$k + k^{(1)}.a + k^{(2)}.a^2 + k^{(3)}.a^3 + \ldots + a^m = -i\mu A.\sqrt{(\varphi a)}.\psi a.$$

En mettant au lieu de a successivement a, a', a'', etc. on aura les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} k + k^{(1)}.a + k^{(2)}.a^2 + \ldots + k^{(m-1)}.a^{m-1} + a^m = - i\mu A .\sqrt{(\varphi a)} .\psi a \\ k + k^{(1)}.a' + k^{(2)}.a'^2 + \ldots + k^{(m-1)}.a'^{m-1} + a'^m = - i'\mu' A .\sqrt{(\varphi a')} .\psi a' \\ k + k^{(1)}.a'' + k^{(2)}.a''^2 + \ldots + k^{(m-1)}.a''^{m-1} + a''^m = - i''\mu'' A .\sqrt{(\varphi a'')} .\psi a'' \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ k + k^{(1)}a^{(m-1)} + k^{(2)}.a^{(m-1)^2} + \ldots + k^{(m-1)}.a^{(m-1)^{m-1}} + a^{(m-1)^m} = - i^{(m-1)}.A.\sqrt{(\varphi a^{(m-1)})}.\psi a^{(m-1)} \end{array}\right\} (7)$$

Au moyen de ces équations il est aisé de déterminer k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$, etc. par A, a, a', a'', etc.

On trouvera

$$A = \frac{1}{f^{(n+2)}[(2n+4)l^{(m-1)} - h^{(m-2)}] + f^{(n+1)}.(2n+2-h^{(m-1)})};$$

or $$h^{(m-1)} = \mu + \mu' + \mu'' + \ldots = 2n + 4$$

$$h^{(m-2)} = \left.\begin{array}{l} -\ \mu(a' + a'' + a''' + \ldots) \\ -\ \mu'(a + a'' + a''' + \ldots) \\ -\ \mu''(a + a' + a''' + \ldots) \\ -\ \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} \mu(l^{(m-1)} + a) \\ + \mu'(l^{(m-1)} + a') \\ + \mu''(l^{(m-1)} + a'') \\ + \text{etc.} \end{array}\right.$$

donc $$h^{(m-2)} = (2n+4)l^{(m-1)} + \mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \ldots$$

on tire de là

$$A = - \frac{1}{(\mu a + \mu' a' + \mu'' a'' + \ldots)f^{(n+2)} + 2f^{(n+1)}} \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

39. Appliquons ce qui précède au cas où $\mu = \mu' = \mu'' = \text{etc.} = 1$.

Dans ce cas on a $m = 2n + 4$.

Les seules équations qui sont nécessaires dans ce cas, sont les équations (4) et (7).

Considérons d'abord les équations (4)

$$\begin{array}{l} f + f^{(1)}a + f^{(2)}a^2 + \ldots + f^{(n+2)}.a^{n+2} = ifa .\sqrt{(\varphi a)} \\ f + f^{(1)}a' + f^{(2)}a'^2 + \ldots + f^{(n+2)}.a'^{n+2} = i'fa' .\sqrt{(\varphi a')} \\ f + f^{(1)}a'' + f^{(2)}a''^2 + \ldots + f^{(n+2)}.a''^{n+2} = i''fa'' .\sqrt{(\varphi a'')} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f + f^{(1)}.a^{(m-1)} + f^{(2)}.a^{(m-1)^2} + \ldots + f^{(n+2)}.a^{(m-1)^{n+2}} = i^{(m-1)}fa^{(m-1)}.\sqrt{(\varphi a^{(m-1)})}. \end{array}$$

On peut aisément éliminer les quantités f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc. de la manière suivante:

On a, comme on sait,

$$\frac{a^{m-p-2}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots}+\frac{a'^{m-p-2}}{(a'-a)(a'-a'')\ldots}+\frac{a''^{m-p-2}}{(a''-a)(a''-a')\ldots}+\text{etc.}=0$$

p étant un nombre entier positif;

ou bien
$$\frac{a^p}{\psi a}+\frac{a'^p}{\psi a'}+\frac{a''^p}{\psi a''}+\ldots+\frac{a^{(m-1)p}}{\psi a^{(m-1)}}=0,$$

lorsque $p<m-1$ $(<2n+3)$.

Donc si l'on multiplie la première des équations précédentes par $\frac{a^p}{\psi a}$, la seconde par $\frac{a'^p}{\psi a'}$, etc. et qu'on les ajoute ensuite, il est aisé de voir que la somme des premiers membres devient égale à zéro si $p<n+1$. On a donc

$$i.\frac{a^p.\sqrt{(\varphi a)}}{\psi a}.fa+i'.\frac{a'^p.\sqrt{(\varphi a')}}{\psi a'}.fa'+i''.\frac{a''^p.\sqrt{(\varphi a'')}}{\psi a''}.fa''+\text{etc.}=0\,.\ (9)$$

En faisant dans cette équation successivement $p=0, 1, 2, 3, \ldots n$ on obtiendra $n+1$ équations par lesquelles on déterminera les n quatités e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, etc. $e^{(n-1)}$, et on trouvera de plus la relation qui doit être entre les quantités a, a', a'', a''' etc.

40. Supposons que $n=0$. Dans ce cas on aura

$$fa=fa'=fa''=\text{etc.}=1\,;$$

donc l'équation précédente devient:

$$\frac{i.\sqrt{(\varphi a)}}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{i'.\sqrt{(\varphi a')}}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}$$
$$+\frac{i''.\sqrt{(\varphi a'')}}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')}+\frac{i'''.\sqrt{(\varphi a''')}}{(a'''-a)(a'''-a')(a'''-a'')}=0.$$

C'est la relation qui existe entre les quatre quantités a, a', a'', a'''.

Les équations (4) deviennent:

$$f+f^{(1)}.a+f^{(2)}.a^2=i.\sqrt{(\varphi a)}$$
$$f+f^{(1)}.a'+f^{(2)}.a'^2=i'.\sqrt{(\varphi a')}$$
$$f+f^{(1)}.a''+f^{(2)}.a''^2=i''.\sqrt{(\varphi a'')}$$
$$f+f^{(1)}.a'''+f^{(2)}.a'''^2=i'''.\sqrt{(\varphi a''')}.$$

En multipliant la première par $\frac{1}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}$ etc. et en ajoutant ensuite on aura:

$$f.\left(\frac{1}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{1}{a'(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}+\text{etc.}\right)$$
$$=\frac{i\sqrt{(\varphi a)}}{a(a-a')(a-a'')(a-a''')}+\frac{i'.\sqrt{(\varphi a')}}{a'(a'-a)(a'-a'')(a'-''')}+\text{etc.}$$

d'où

$$-f = i\cdot\frac{a'a''a'''}{(a-a')(a-a'')(a-a''')}\cdot\sqrt{(\varphi a)} + i'\cdot\frac{aa''a'''}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')}\cdot\sqrt{(\varphi a')}$$
$$+ i''\cdot\frac{aa'a'''}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')}\cdot\sqrt{(\varphi a'')} + i'''\cdot\frac{aa'a''}{(a'''-a)(a'''-a')(a'''-a'')}\cdot\sqrt{(\varphi a''')}.$$

De la même manière

$$f^{(2)} = \frac{i\sqrt{(\varphi a)}}{(a-a')(a-a'')} + \frac{i'\sqrt{(\varphi a')}}{(a'-a)(a'-a'')} + \frac{i''.\sqrt{(\varphi a'')}}{(a''-a)(a''-a')},$$

et ensuite

$$f^{(1)} = \frac{i\sqrt{(\varphi a)}}{a-a'} + \frac{i'\sqrt{(\varphi a')}}{a'-a} - (a+a').f^{(2)}.$$

Connaissant f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, on aura aisément la valeur de A par l'équation (8), qui devient dans ce cas

$$A = -\frac{1}{(a+a'+a''+a''')f^{(2)}+2f^{(1)}};$$

k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, et $k^{(3)}$, se déterminent par les équations (7).

On peut aussi déterminer les coefficiens de la manière suivante.

Soit $R = (x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$, et dans les équations $P = \sqrt{(R + C.S)}$, $S = l + l^{(1)}.x + l^{(2)}.x^2 + l^{(3)}.x^3 + x^4 = \theta x$, faisons $x = p, p', p'', p'''$, on obtiendra

$$f + p.f^{(1)} + p^2.f^{(2)} = \sqrt{C}.\sqrt{(\theta p)}$$
$$f + p'.f^{(1)} + p'^2.f^{(2)} = \sqrt{C}.\sqrt{(\theta p')}$$
$$f + p''.f^{(1)} + p''^2.f^{(2)} = \sqrt{C}.\sqrt{(\theta p'')}$$
$$f + p'''.f^{(1)} + p'''^2.f^{(2)} = \sqrt{C}.\sqrt{(\theta p''')}.$$

En éliminant f, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$, il restera l'équation:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\sqrt{[(p-a)(p-a')(p-a'')(p-a''')]}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')} + \frac{\sqrt{[(p'-a)(p'-a')(p'-a'')(p'-a''')]}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\ + &\frac{\sqrt{[(p''-a)(p''-a')(p''-a'')(p''-a''')]}}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')} + \frac{\sqrt{[(p'''-a)(p'''-a')(p'''-a'')(p'''-a''')]}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{aligned}\right\} = 0$$

qui exprime la relation entre a, a', a'', a''', et qui est plus simple que celle trouvée plus haut.

41. Supposons maintenant que $m = 2$.

Dans ce cas on peut faire les suppositions suivantes:

1. $P^2 - Q^2R = C.(x-a)(x-a')^{2n+3}$
2. $P^2 - Q^2R = C.(x-a)^2(x-a')^{2n+2}$
3. $P^2 - Q^2R = C.(x-a)^3(x-a')^{2n+1}$

. . . .

$n+1$. $P^2 - Q^2R = C.(x-a)^{n+2}.(x-a')^{n+2}$.

Dans tous ces cas les équations (7) deviennent

$$k + k^{(1)}.a + a^2 = - A.(a - a').\sqrt{(\varphi a)}$$
$$k + k^{(1)}.a' + a'^2 = - A.(a' - a).\sqrt{(\varphi a')},$$

d'où l'on tire

$$k^{(1)} = -(a + a') - A.\left(\sqrt{(\varphi a)} + \sqrt{(\varphi a')}\right)$$
$$k = aa' + A\left(a'\sqrt{(\varphi a)} + a\sqrt{(\varphi a')}\right).$$

Les autres coefficiens se déterminent par l'équation (5).

Je vais les évaluer dans les cas où $n = 0$ et $n = 1$.

1. Lorsque $n = 0$, on peut faire

a. $P^2 - R = C.(x - a)\,(x - a')^3$,

ou b. $P^2 - R = C.(x - a)^2(x - a')^2$.

a. Si $P^2 - R = C.(x - a)(x - a')^3$.

Dans ce cas l'équation (5) donne

$$Fa = \sqrt{(\varphi a)}$$
$$Fa' = \sqrt{(\varphi a')}$$
$$d(Fa') = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d\varphi a'}{\sqrt{(\varphi a')}}$$
$$d^2(Fa') = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{d^2\varphi a'}{\sqrt{(\varphi a')}} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(d\varphi a')^2}{\sqrt{[(\varphi a')^3]}}$$

ou bien

$$f + f^{(1)}.a + f^{(2)}.a^2 = \sqrt{(\varphi a)}$$
$$f + f^{(1)}.a' + f^{(2)}.a'^2 = \sqrt{(\varphi a')}$$
$$f^{(1)} + 2f^{(2)}.a' = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}}$$
$$2f^{(2)} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi'' a'}{\sqrt{(\varphi a')}} - \tfrac{1}{4}\cdot\frac{(\varphi' a')^2}{\sqrt{[(\varphi a')^3]}};$$

donc

$$f^{(2)} = \tfrac{1}{8}\cdot\frac{2\varphi a'.\varphi'' a' - (\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{(\varphi a')}}$$
$$f^{(1)} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}} - \frac{a'}{4}\cdot\frac{2\varphi a'\varphi'' a' - (\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{(\varphi a')}}$$
$$f = \sqrt{(\varphi a)} - \frac{a'}{2}\cdot\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}} + \frac{a'^2}{8}\cdot\frac{2\varphi a'.\varphi'' a' - (\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{(\varphi a')}}$$

et la relation entre a et a' devient

$$\sqrt{(\varphi a)} - \sqrt{(\varphi a')} - \tfrac{1}{2}(a - a').\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}} + \tfrac{1}{8}(a - a')^2.\left(\frac{2\varphi a'\varphi'' a' - (\varphi' a')^2}{\varphi a'\sqrt{(\varphi a')}}\right) = 0,$$

ou

$$\sqrt{(\varphi a)}.\sqrt{(\varphi a')} = \varphi a' + \tfrac{1}{2}(a - a')\varphi' a' - \tfrac{1}{8}(a - a')^2\,\frac{[2\varphi a'.\varphi'' a' - (\varphi' a')^2]}{\varphi a'}.$$

On aura ensuite A par l'équation

$$A = -\frac{1}{(a+3a')f^{(2)}+2f^{(1)}}.$$

42. On peut aussi trouver ces équations de la manière suivante. On a
$$P = \sqrt{(R + C(x-a)(x-a')^3)}.$$
Soit
$$R = (x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$$
et faisons $x = p, p', p'', p'''$,
nous aurons

$$\begin{aligned}
f + f^{(1)}.p + f^{(2)}.p^2 &= \sqrt{C}.\sqrt{((p-a)(p-a'))}.(p-a')\\
f + f^{(1)}.p' + f^{(2)}.p'^2 &= \sqrt{C}.\sqrt{((p'-a)(p'-a'))}.(p'-a')\\
f + f^{(1)}.p'' + f^{(2)}.p''^2 &= \sqrt{C}.\sqrt{((p''-a)(p''-a'))}.(p''-a')\\
f + f^{(1)}.p''' + f^{(2)}.p'''^2 &= \sqrt{C}.\sqrt{((p'''-a)(p'''-a'))}.(p'''-a').
\end{aligned}$$

En éliminant f, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$, on aura entre a et a' la relation suivante:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{(p-a')\sqrt{[(p-a)(p-a')]}}{(p-p')(p-p'')(p-p''')} + \dfrac{(p'-a')\sqrt{[(p'-a)(p'-a')]}}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}\\ + \dfrac{(p''-a')\sqrt{[(p''-a)(p''-a')]}}{(p''-p)(p''-p')(p''-''')} + \dfrac{(p'''-a')\sqrt{[(p'''-a)(p'''-a')]}}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}\end{matrix}\right\} = 0.$$

b. Si $P^2 - R = C.(x-a)^2(x-a')^2$.

Dans ce cas l'équation (5) donne

$$\begin{aligned}
f + f^{(1)}.a + f^{(2)}.a^2 &= \sqrt{(\varphi a)}\\
f + f^{(1)}.a' + f^{(2)}.a'^2 &= \sqrt{(\varphi a')}\\
f^{(1)} + 2f^{(2)}.a &= \tfrac{1}{2}.\frac{\varphi' a}{\sqrt{(\varphi a)}}\\
f^{(1)} + 2f^{(2)}.a' &= \tfrac{1}{2}.\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}}.
\end{aligned}$$

Des deux dernières équations on tire

$$f^{(2)} = \tfrac{1}{4}.\frac{\varphi' a}{(a-a')\sqrt{(\varphi a)}} + \tfrac{1}{4}.\frac{\varphi' a'}{(a'-a)\sqrt{(\varphi a')}}$$

$$f^{(1)} = \tfrac{1}{2}.\frac{a'.\varphi' a}{(a'-a)\sqrt{(\varphi a)}} + \tfrac{1}{2}.\frac{a\varphi' a'}{(a-a')\sqrt{(\varphi a')}}.$$

En substituant ces valeurs dans les deux premières, on en tirera

$$f = \tfrac{1}{4}.\frac{aa'}{a-a'}.\frac{\varphi' a}{\sqrt{(\varphi a)}} + \tfrac{1}{4}.\frac{aa'}{a'-a}.\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}} - \frac{a'\sqrt{(\varphi a)} - a\sqrt{(\varphi a')}}{a-a'}$$

et

$$\sqrt{(\varphi a)} - \sqrt{(\varphi a')} - \tfrac{1}{4}(a-a')\left(\frac{\varphi' a}{\sqrt{(\varphi a)}} + \frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}}\right) = 0.$$

On a ensuite

$$A = -\frac{1}{2(a+a')f^{(2)}+2f^{(1)}} = -\frac{2}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{(\varphi a)}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}}}.$$

En substituant ces valeurs dans les expressions de k et k', on obtiendra:

$$k = aa' - 2.\frac{a'\sqrt{(\varphi a)}+a\sqrt{(\varphi a')}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{(\varphi a)}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}}} = aa' + 2b,$$

$$k' = -(a+a') + 2.\frac{\sqrt{(\varphi a)}+\sqrt{(\varphi a')}}{\frac{\varphi' a}{\sqrt{(\varphi a)}}+\frac{\varphi' a'}{\sqrt{(\varphi a')}}} = -(a+a') + 2b'.$$

Par ces valeurs on a:

$$\frac{k+k'x+x^2}{(x-a)(x-a')} = \frac{aa'-(a+a')x+x^2+2b+2b'x}{(x-a)(x-a')}$$
$$= 1 + \frac{2b+2b'x}{(x-a)(x-a')}.$$

Donc on aura

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(\varphi x)}} = -\int\frac{(2b+2b'x)}{(x-a)(x-a')}\cdot\frac{dx}{\sqrt{(\varphi x)}} + A.\log\left(\frac{P+\sqrt{(\varphi x)}}{P-\sqrt{(\varphi x)}}\right).$$

La relation entre a et a' peut aussi s'exprimer de la manière suivante:

$$\frac{(p-a)(p-a')}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{(p'-a)(p'-a')}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}-\frac{(p''-a)(p''-a')}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}-\frac{(p'''-a)(p'''-a')}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0.$$

ou

$$(p+p'-p''-p''')aa'-(pp'-p''p''')(a+a')+pp'(p''+p''')-p''p'''(p+p')=0,$$

d'où l'on tire

$$a' = \frac{(pp'-p''p''')a+(p+p')p''p'''-(p''+p''')pp'}{(p+p'-p''-p''')a-pp'+p''p'''}.$$

45. Supposons maintenant que

$$P^2 - R = C(x-p)(x-a)(x-a')^2$$

$x-p$ étant facteur de R.

On a donc $\quad P = (x-p)(f+f^{(1)}.x),$

donc $\quad (f+f^{(1)}.x)^2 = \frac{(x-p')(x-p'')(x-p''')}{x-p} + C.\frac{(x-a)(x-a')^2}{x-p}.$

Faisons $x = p', p'', p'''$, on aura:

$$f+f^{(1)}.p' = \frac{(p'-a')}{\sqrt{(p'-p)}}.\sqrt{C}.\sqrt{(p'-a)}$$

$$f+f^{(1)}.p'' = \frac{p''-a'}{\sqrt{(p''-p)}}.\sqrt{C}.\sqrt{(p''-a)}$$

$$f+f^{(1)}.p''' = \frac{p'''-a'}{\sqrt{(p'''-p)}}.\sqrt{C}.\sqrt{(p'''-a)}.$$

En éliminant f et $f^{(1)}$, on aura:

$$\frac{(p'-a').\sqrt{(p'-a)}}{(p'-p'')(p'-p''')\sqrt{(p'-p)}}+\frac{(p''-a')\sqrt{(p''-a)}}{(p''-p')(p''-p''')\sqrt{(p''-p)}}+\frac{(p'''-a')\sqrt{(p'''-a)}}{(p'''-p')(p'''-p'')\sqrt{(p'''-p)}}=0,$$

d'où l'on tirera

$$a'=\frac{Bp'.\sqrt{(p'-a)}+B'.p''.\sqrt{(p''-a)}+B''.p''',\sqrt{(p'''-a)}}{B.\sqrt{(p'-a)}+B'.\sqrt{(p''-a)}+B''.\sqrt{(p'''-a)}},$$

en faisant pour abréger

$$B=\frac{1}{(p'-p'')(p'-p''').\sqrt{(p'-p)}},\ B'=\frac{1}{(p''-p')(p''-p''').\sqrt{(p''-p)}},\ B''=\frac{1}{(p'''-p')(p'''-p'').\sqrt{(p'''-p)}}.$$

44. Dans les trois numéros précédents nous avons considéré le cas où $m=2$. Supposons maintenant $m=1$.

Dans ce cas on a

$$P^2-Q^2R=C.(x-a)^{2n+4}$$

et

$$\int\frac{x+k}{x-a}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

k se détermine immédiatement par l'équation (7) qui donne

$$k=-a-\mu A.\sqrt{(\varphi a)}.$$

Les quantités A, a, f, $f^{(1)}$, etc. e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$, etc. se déterminent par l'équation (5), qui donne les suivantes:

$$Fa=fa.\sqrt{(\varphi a)}$$

$$dFa=dfa.\sqrt{(\varphi a)}+fa.d\sqrt{(\varphi a)}$$

$$d^2Fa=d^2fa.\sqrt{(\varphi a)}+2dfa.d\sqrt{(\varphi a)}+fa.d^2\sqrt{(\varphi a)}$$

. . . .

$$d^{2n+3}Fa=d^{2n+3}fa.\sqrt{(\varphi a)}+(2n+3)d^{2n+2}fa.d\sqrt{(\varphi a)}+\frac{(2n+3)(2n+2)}{2}.d^{2n+1}fa.d^2\sqrt{(\varphi a)}+\text{etc.}$$

Par ces équations qui sont toutes linéaires par rapport à f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, etc. e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ etc. on peut déterminer ces quantités et a, mais par des calculs assez longs. Je donnerai dans la suite une méthode sure et directe de déterminer ces quantités dans tous les cas. Pour le moment je vais résoudre le problème en supposant

$$Q=1 \text{ et } P^2-R=C.(x-p)(x-a)^3,$$

$x-p$ étant facteur de R, et $R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p''')$.

Soit $$P=(x-p).(f+f^{(1)}.x),$$

donc $$(f+f^{(1)}x)^2=\frac{(x-p')(x-p'')(x-p''')}{x-p}+C.\frac{(x-a)^3}{x-p}..$$

En faisant successivement $x = p', p'', p'''$, il viendra

$$f + f^{(1)}.p' = \sqrt{C}.(p'-a).\sqrt{\left(\frac{p'-a}{p'-p}\right)}$$

$$f + f^{(1)}.p'' = \sqrt{C}.(p''-a).\sqrt{\left(\frac{p''-a}{p''-p}\right)}$$

$$f + f^{(1)}.p''' = \sqrt{C}.(p'''-a).\sqrt{\left(\frac{p'''-a}{p'''-p}\right)}.$$

On a de plus en faisant $x = 0$

$$f^2 = \frac{p'p''p'''}{p} + \frac{C.a^3}{p}.$$

En éliminant f et $f^{(1)}$ entre les trois premières équations il résultera:

$$\frac{(p'-a)\sqrt{\left(\frac{p'-a}{p'-p}\right)}}{(p'-p'')(p'-p''')} + \frac{(p''-a)\sqrt{\left(\frac{p''-a}{p''-p}\right)}}{(p''-p')(p''-p''')} + \frac{(p'''-a)\sqrt{\left(\frac{p'''-a}{p'''-p}\right)}}{(p'''-p')(p'''-p'')} = 0.$$

De cette équation on peut tirer la valeur de a, et celle-ci étant connue, on aura aisément les valeurs de f, $f^{(1)}$ et C, que je me dispenserai d'écrire.

45. De l'équation $\int \frac{x+k}{x-a} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}} = A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$ on tire en substituant la valeur de $k = -a - \mu A\sqrt{(\varphi a)}$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \mu A\sqrt{(\varphi a)}.\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right);$$

donc

$$\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} = \frac{1}{\mu A.\sqrt{(\varphi a)}}.\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{\mu\sqrt{(\varphi a)}}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

De cette manière on trouvera donc toutes les intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ qui peuvent se réduire à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ moyennant une fonction logarithmique de la forme $A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$. Je donnerai dans la suite la résolution de ce problème dans toute sa généralité. Elle dépend, comme nous venons de voir, de la résolution de l'équation

$$P^2 - Q^2 R = C.(x-a)^{2n+4}.$$

Pour le moment je remarque qu'on peut lui donner la forme

$$P'^2 - Q'^2.R' = C.$$

En effet soit

$$P = f_1 + f_1^{(1)}(x-a) + f_1^{(2)}(x-a)^2 + \ldots \text{ etc.}$$

$$Q = e_1 + e_1^{(1)}(x-a) + e_1^{(2)}(x-a)^2 + \ldots \text{ etc.}$$

$$R = \alpha' + \beta'(x-a) + \gamma'(x-a)^2 + \delta'(x-a)^3 + \varepsilon'(x-a)^4,$$

on aura, en faisant $y = \frac{1}{x-a}$, $x - a = \frac{1}{y}$; donc

$$P = f_1 + f_1^{(1)}.\frac{1}{y} + f_1^{(2)}.\frac{1}{y^2} + \ldots = \frac{P'}{y^{n+2}}$$

$$Q = e_1 + e_1^{(1)}.\frac{1}{y} + e_1^{(2)}.\frac{1}{y^2} + \ldots = \frac{Q'}{y^n}$$

$$R = \alpha' + \frac{\beta'}{y} + \frac{\gamma'}{y^2} + \frac{\delta'}{y^3} + \frac{\varepsilon'}{y^4} = \frac{R'}{y^4},$$

et en substituant et multipliant par y^{2n+4},

$$P'^2 - Q'^2 R' = C.$$

Donc si l'on peut résoudre cette équation, on peut aussi résoudre la proposée.

La résolution de l'équation précédente sera donnée dans le cours du problème suivant, qui consiste à déterminer k et R de la manière que l'intégrale $\int \frac{(x+k).dx}{\sqrt{R}}$ devienne intégrable par la fonction logarithmique $A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

46. Nous avons vu dans ce qui précède que si l'on a

$$\int \frac{x^m + k^{(m-1)}.x^{m-1} + k^{(m-2)}.x^{m-2} + \ldots + k^{(1)}x + k}{(x-a)(x-a')(x-a'')\ldots(x-a^{(m-1)})}.\frac{dx}{\sqrt{R}} = A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

il en résulte nécessairement $m+1$ conditions entre les $2m$ quantités a, a', a'', ... $a^{(m-1)}$, k, $k^{(1)}$ ... $k^{(m-1)}$; on peut donc prendre $m-1$, mais non pas un plus grand nombre de ces quantités, à volonté, et puis déterminer les autres.

Il suit de là qu'on peut faire

$$\frac{x^m + k^{(m-1)}.x^{m-1} + k^{(m-2)}.x^{m-2}x + \ldots + k^{(1)}x + k}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(m-1)})} = \frac{x^n + k_1{}^{(n-1)}x^{n-1} + \ldots + k_1{}^{(1)}x + k_1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}$$
$$+ \frac{L}{x-c} + \frac{L'}{x-c'} + \ldots + \frac{L^{(n-1)}}{x-c^{(n-1)}}$$

$k_1{}^{(n-1)}$, $k_1{}^{(n-2)}$, ... $k_1{}^{(1)}$, k_1, a, a', a'', ... $a^{(n-1)}$, étant quelconques, d'où il résulte qu'on peut exprimer l'intégrale

$$\int \frac{x^n + k_1{}^{(n-1)}.x^{n-1} + \ldots + k_1{}^{(1)}x + k_1}{(x-a)(x-a')\ldots(x-a^{(n-1)})}.\frac{dx}{\sqrt{R}}$$

par n intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-c)\sqrt{R}}$.

On voit de même qu'on peut exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ par n intégrales de la forme $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, dont les $n-1$ sont arbitraires par rapport à a.

Problème III.

Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(k+x).dx}{\sqrt{R}}$ *qui peuvent être exprimées par la fonction* $A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

47. Puisque $\int \frac{(x+k).dx}{\sqrt{R}} = A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$, on aura en différentiant

$$x+k=\frac{M}{N},$$

$$M=A.\frac{\left(2N.\frac{dP}{dx}-P.\frac{dN}{dx}\right)}{Q},$$

$$N=P^2-Q^2R.$$

Pour que l'équation $\frac{M}{N}=x+k$ puisse avoir lieu, il faut que $N=\text{const.}=c$: on a donc les deux équations:

$$c(x+k)=2Ac.\frac{dP}{Qdx},$$

$$c=P^2-Q^2R;$$

ou bien en supposant $c=1$,

$$x+k=2A.\frac{dP}{Qdx},$$

$$1=P^2-Q^2R.$$

La première équation n'a aucune difficulté. Elle donne aisément les valeurs de A et k, quand P et Q sont connus. En effet soit

$$P=f+f^{(1)}.x+\ldots+f^{(n+2)}.x^{n+2},$$

$$Q=e+e^{(1)}.x+\ldots+e^{(n)}.x^n,$$

on a en substituant

$$x+k=\frac{2A.(n+2).f^{(n+2)}.x^{n+1}+(n+1).f^{(n+1)}.x^n+\ldots}{e^{(n)}.x^n+e^{(n-1)}.x^{n-1}\ldots},$$

d'où l'on tire

$$1=\frac{2A.(n+2).f^{(n+2)}}{e^{(n)}},$$

$$k=\frac{2A.f^{(1)}}{e};$$

donc

$$\left.\begin{aligned} A&=\frac{e^{(n)}}{(2n+4).f^{(n+2)}}\\ k&=\frac{f^{(1)}.e^{(n)}}{(n+2)e.f^{(n+2)}}\end{aligned}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

Considérons maintenant l'équation

$$P^2 - Q^2R = 1,$$

et cherchons à trouver les valeurs de P et Q.

Première méthode.

48. La méthode la plus simple qui s'offre est celle des coefficiens indéterminées. Substituant donc les valeurs de P et Q on obtiendra:

$$(f+f^{(1)}.x+f^{(2)}.x^2+\cdots+f^{(n+2)}.x^{n+2})^2-(e+e^{(1)}.x+\cdots e^{(n)}.x^n)^2(\alpha+\beta x+\cdots+\varepsilon x^4)=1.$$

En développant et comparant les coefficiens on aura les équations suivantes au nombre de $2n+5$

$$f^2 - \alpha e^2 = 1$$

$$\left.\begin{aligned} & f.f^{(p)}+f^{(1)}.f^{(p-1)}+f^{(2)}.f^{(p-2)}+f^{(3)}.f^{(p-3)}+\dots \\ & -\alpha(e.e^{(p)}\ \ +e^{(1)}.e^{(p-1)}+e^{(2)}.e^{(p-2)}+\dots) \\ & -\beta(e.e^{(p-1)}+e^{(1)}.e^{(p-2)}+e^{(2)}.e^{(p-3)}+\dots) \\ & -\gamma(e.e^{(p-2)}+e^{(1)}.e^{(p-3)}+e^{(2)}.e^{(p-4)}+\dots) \\ & -\delta(e.e^{(p-3)}+e^{(1)}.e^{(p-4)}+e^{(2)}.e^{(p-5)}+\dots) \\ & -\varepsilon(e.e^{(p-4)}+e^{(1)}.e^{(p-5)}+e^{(2)}.e^{(p-6)}+\dots) \end{aligned}\right\} = 0 \quad \dots\dots (2)$$

En faisant dans cette équation successivement $p = 1, 2, 3$, etc. jusqu'à $2n+4$, on aura les équations nécessaires pour satisfaire à l'équation $P^2 - Q^2R = 1$.

Ayant $2n+5$ équations mais seulement $2n+4$ coefficiens indéterminés, il est clair qu'on obtiendra une relation entre les cinq quantités α, β, γ, δ, ε.

En faisant dans l'équation (2) $p = 2n+4$, on obtiendra

$$f^{(n+2)2} - \varepsilon . e^{(n)2} = 0,$$

donc

$$f^{(n+2)} = e^{(n)}.\sqrt{\varepsilon}.$$

En substituant cette valeur dans les expressions de A et de k, elles deviennent

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}}, \\ k &= \frac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \cdot \frac{f^{(1)}}{e} . \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots\dots (5)$$

49. Avant d'aller plus loin je vais appliquer la méthode précédente en supposant $n = 0$.

On a dans ce cas $Q = e$, $P = f + f^{(1)}.x + f^{(2)}.x^2$.

Les équations (2) deviennent donc

$$f^2 - \alpha e^2 = 1,$$

$$2ff^{(1)} - \beta e^2 = 0,$$

$$f^{(1)^2} + 2ff^{(2)} - \gamma e^2 = 0,$$
$$2f^{(1)}f^{(2)} - \delta e^2 = 0,$$
$$f^{(2)^2} - \varepsilon e^2 = 0.$$

On tire de ces équations

$$f^{(2)} = e\sqrt{\varepsilon} = \frac{\delta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{(\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2)}},$$
$$f^{(1)} = \frac{\delta . e}{2\sqrt{\varepsilon}} = \frac{\delta^2}{2\sqrt{(\beta^2\varepsilon^2 - \alpha\varepsilon\delta^2)}},$$
$$f = \frac{\beta e}{\delta}\sqrt{\varepsilon} = \frac{\beta\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{(\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2)}},$$
$$e = \frac{\delta}{\sqrt{(\beta^2\varepsilon - \alpha\delta^2)}}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation $f^{(1)^2} + 2ff^{(2)} - \gamma e^2 = 0$ il viendra:

$$\frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta} - \gamma = 0, \text{ donc } \gamma = \frac{\delta^2}{4\varepsilon} + \frac{2\beta\varepsilon}{\delta}.$$

Celle-ci est donc la relation qui doit avoir lieu entre les quantités β, γ, δ et ε. Il est remarquable que α ne s'y trouve point.

Par les équations (5) on a ensuite

$$A = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}}, \quad k = \frac{\delta}{4\varepsilon}.$$

On a donc

$$\int \frac{\left(x + \frac{\delta}{4\varepsilon}\right).dx}{\sqrt{\left[\alpha + \beta x + \left(\frac{\delta^2}{4\varepsilon} + 2\,\frac{\beta\varepsilon}{\delta}\right)x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4\right]}} = \frac{1}{4\sqrt{\varepsilon}} \log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right).$$

Au reste cette intégrale est facile à trouver; car en faisant $x + \frac{\delta}{4\varepsilon} = y$, on aura

$$\int \frac{ydy}{\sqrt{(\alpha^1 + \gamma^1 y^2 + \varepsilon y^4)}},$$

intégrale facile à trouver par les méthodes connues.

50. Les équations (2) ont l'inconvénient de n'être par linéaires. On peut trouver un système d'équations linéaires qui les remplacent de la manière suivante.

En mettant $\frac{1}{y}$ au lieu de x dans l'équation

$$P^2 - Q^2R = 1$$

on obtiendra une équation de la forme

$$(Fy)^2 - (fy)^2 . \varphi y = y^{2n+4},$$

dans laquelle

$$Fy = f.y^{n+2} + f^{(1)}.y^{n+1} + \ldots + f^{(n+2)}$$
$$fy = e.y^{n} + e^{(1)}.y^{n-1} + \ldots + e^{(n)}$$
$$\varphi y = \alpha y^4 + \beta y^3 + \gamma y^2 + \delta y + \varepsilon.$$

Il est clair que l'équation

$$Fy = fy.\sqrt{(\varphi y)}$$

aura lieu dans la supposition de $y=0$, en la différentiant $2n+3$ fois de suite. On a donc les équations suivantes:

$$Fy = fy.\sqrt{(\varphi y)}$$
$$dFy = dfy.\sqrt{(\varphi y)} + fy.d\sqrt{(\varphi y)}$$
$$d^2Fy = d^2fy.\sqrt{(\varphi y)} + 2dfy.d\sqrt{(\varphi y)} + fy.d^2\sqrt{(\varphi y)}$$

. . . .

$$d^{2n+3}Fy = d^{2n+3}fy.\sqrt{(\varphi y)} + (2n+3)d^{2n+2}fy.d\sqrt{(\varphi y)} + \frac{(2n+3)(2n+2)}{2}d^{2n+1}fy.d^2\sqrt{(\varphi y)} + \cdots \text{etc.}$$

En faisant dans ces équations $y=0$ on aura

$$Fy = f^{(n+2)},$$
$$\frac{dFy}{dy} = f^{(n+1)},$$
$$\frac{d^2Fy}{dy^2} = 1.2f^{(n)},$$

. . . .

$$\frac{d^pFy}{dy^p} = 1.2.3\ldots pf^{(n+2-p)},$$

. . . .

$$\frac{d^{n+2}Fy}{dy^{n+2}} = 1.2.3\ldots(n+2).f,$$
$$\frac{d^{n+2+p}Fy}{dy^{n+p+2}} = 0.$$

De même

$$fy = e^{(n)},$$
$$\frac{dfy}{dy} = e^{(n-1)},$$
$$\frac{d^2fy}{dy^2} = 1.2.e^{(n-2)},$$

. . . .

$$\frac{d^nfy}{dy^n} = 1.2.3\ldots n.e,$$
$$\frac{d^{n+p}fy}{dy^{n+p}} = 0,$$

$$\sqrt{(\varphi y)} = \sqrt{\varepsilon}$$

$$\frac{d\sqrt{(\varphi y)}}{dy} = \frac{d\varphi y}{2dy.\sqrt{(\varphi y)}} = \frac{\delta}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\frac{d^2\sqrt{(\varphi y)}}{dy^2} = \frac{d^2\varphi y}{2dy^2.\sqrt{(\varphi y)}} - \frac{(d\varphi y)^2}{4dy^2\varphi y\sqrt{(\varphi y)}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\delta^2}{4\varepsilon\sqrt{\varepsilon}},$$

$$\frac{d^3\sqrt{(\varphi y)}}{dy^3} = \frac{1}{dy^3}\left(\frac{d^3\varphi y}{2\sqrt{(\varphi y)}} - \frac{3d\varphi y.d^2\varphi y}{4\varphi y\sqrt{(\varphi y)}} + \frac{(3d\varphi y)^3}{8(\varphi y)^2\sqrt{(\varphi y)}}\right),$$

$$\frac{d^3\sqrt{(\varphi y)}}{dy^3} = \frac{3\beta}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3\gamma\delta}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} + \frac{3\delta^3}{8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}}.$$

De la même manière on trouvera $\frac{d^4\sqrt{(\varphi y)}}{dy^4}$ etc. en supposant $y = 0$. Pour plus de simplicité, je désigne par $c^{(p)}$ la valeur de $\frac{d^p\sqrt{(\varphi y)}}{dy^p}$ en faisant $y = 0$.

En substituant les valeurs trouvées on obtiendra les équations suivantes:

$$f^{(n+2)} = c.e^{(n)}$$

$$f^{(n+1)} = c.e^{(n-1)} + c^{(1)}.e^{(n)}$$

$$f^{(n)} = c.e^{(n-2)} + c^{(1)}.e^{(n-1)} + \tfrac{1}{2}c^{(2)}.e^{(n)}$$

$$f^{(n-1)} = c.e^{(n-3)} + c^{(1)}.e^{(n-2)} + \tfrac{1}{2}c^{(2)}.e^{(n-1)} + \frac{1}{2.3}c^{(3)}.e^{(n)}$$

$$f^{(n-2)} = c.e^{(n-4)} + c^{(1)}.e^{(n-3)} + \tfrac{1}{2}c^{(2)}.e^{(n-2)} + \frac{1}{2.3}c^{(3)}.e^{(n-1)} + \frac{1}{2.3.4}.c^{(4)}.e^{(n)}$$

. . . .

$$f^{(n-p+2)} = c.e^{(n-p)} + c^{(1)}.e^{(n-p+1)} + \frac{c^{(2)}}{2}.e^{(n-p+2)} + \frac{c^{(3)}}{2.3}.e^{(n-p+3)} + \text{etc.}$$

$$\ldots + \frac{c^{(k)}}{1.2.3\ldots k}.e^{(n-p+k)} + \ldots\ldots + \frac{c^{(p)}}{1.2.3\ldots p}e^{(n)}$$

$$f^{(2)} = c.e + c^{(1)}.e^{(1)} + \frac{c^{(2)}}{2}.e^{(2)} + \frac{c^{(3)}}{2.3}.e^{(3)} + \ldots + \frac{c^{(n)}}{1.2\ldots n}.e^{(n)}$$

$$f^{(1)} = c^{(1)}.e + \frac{c^{(2)}}{2}e^{(1)} + \frac{c^{(3)}}{2.3}e^{(2)} + \ldots + \frac{c^{(n+1)}}{1.2\ldots(n+1)}.e^{(n)}$$

$$f = \frac{c^{(2)}}{2}.e + \frac{c^{(3)}}{2.3}.e^{(1)} + \frac{c^{(4)}}{2.3.4}.e^{(2)} + \ldots + \frac{c^{(n+2)}}{1.2\ldots(n+2)}.e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(3)}}{2.3}.e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4}.e^{(1)} + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5}.e^{(2)} + \ldots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2\ldots(n+3)}.e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(4)}}{2.3.4}e + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5}.e^{(1)} + \ldots\ldots\ldots + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\ldots(n+4)}.e^{(n)}$$

. . . .

$$0 = \frac{c^{(p)}}{2.3\ldots p}\, e + \frac{c^{(p+1)}}{2.3\ldots(p+1)}\, e^{(1)} + \;\ldots\; + \frac{c^{(n+p)}}{2.3\ldots(n+p)}\,.\,e^{(n)}$$

. . . .

$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}\,.\,e + \frac{c^{(n+4)}}{2.3\ldots(n+4)}\,.\,e^{(1)} + \ldots + \frac{c^{(2n+3)}}{2.3\ldots(2n+3)}\,.\,e^{(n)}.$$

51. Ces équations sont, comme on le voit, très commodes pour déterminer les coefficiens e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ etc. et f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ etc. Les $n+1$ dernières donnent les coefficiens $e^{(1)}$, $e^{(2)}, \ldots e^{(n)}$ en e et de plus une relation entre les quantités $c^{(3)}$, $c^{(4)}$ etc. Les $n+2$ premières donnent ensuite immédiatement les coefficiens f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$ etc. en e. Celui-ci est arbitraire et disparaît du résultat, comme il est aisé de voir. Si l'on fait $k=0$, on aura $f^{(1)}=0$, d'où il résultera une seconde relation entre les quantités $c^{(1)}$, $c^{(2)}$ etc. Au reste cette supposition ne diminue pas la géneralité du problème; car en faisant dans le résultat $x=y+k$, on aura la même intégrale que si l'on n'avait pas supposé $k=0$. Soit donc $f^{(1)}=0$, on voit que

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(\alpha+\beta x+\gamma x^2+\delta x^3+\varepsilon x^4)}}$$

peut s'exprimer par des logarithmes, toutes les fois qu'on a entre les quantités α, β, γ, δ, ε les deux relations qui résultent de l'élimination des quantités e, $e^{(1)}$, $e^{(2)}$ etc. des $n+2$ équations

$$0 = c^{(1)}.e + \frac{c^{(2)}}{2}\,.\,e^{(1)} + \;\ldots\; + \frac{c^{(n+1)}}{1.2\ldots(n+1)}\,.\,e^{(n)}$$

$$0 = \frac{c^{(3)}}{2.3}\,.\,e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4}\,.\,e^{(1)} + \ldots + \frac{c^{(n+3)}}{1.2\ldots(n+3)}\,.\,e^{(n)}$$

. . . .

$$0 = \frac{c^{(n+3)}}{2.3\ldots(n+3)}\, e + \;\ldots\ldots\; + \frac{c^{(2n+3)}}{1.2.3\ldots(2n+3)}\,.\,e^{(n)}.$$

52. Appliquons ce qui précède au cas où $n=0$ et $n=1$.

Dans le premier cas on aura

$$f^{(2)} = c.e,\; f^{(1)} = c^{(1)}.e,\; f = \frac{c^{(2)}}{2}\,.e,\; 0 = c^{(3)}.$$

La dernière équation donne

$$0 = \frac{3\beta}{\sqrt{\varepsilon}} - \frac{3\gamma\delta}{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}} + \frac{3\delta^3}{8\varepsilon^2\sqrt{\varepsilon}},$$

d'où $\gamma = \frac{2\varepsilon\beta}{\delta} + \frac{\delta^2}{4\varepsilon}$, comme nous avons trouvé plus haut.

Soit maintenant $n=1$.

Dans ce cas on a

$$0 = c^{(1)}.e + \frac{c^{(2)}}{2}.e^{(1)} \qquad \text{d'où} \quad 0 = 2c^{(1)} + c^{(2)}.\frac{e^{(1)}}{e}$$

$$0 = \frac{c^{(3)}}{2.3}.e + \frac{c^{(4)}}{2.3.4}.e^{(1)} \qquad 0 = 4c^{(3)} + c^{(4)}.\frac{e^{(1)}}{e}$$

$$0 = \frac{c^{(4)}}{2.3.4}.e + \frac{c^{(5)}}{2.3.4.5}.e^{(1)} \qquad 0 = 5c^{(4)} + c^{(5)}.\frac{e^{(1)}}{e}.$$

En éliminant $\frac{e^{(1)}}{e}$ il viendra:

$$c^{(1)}.c^{(4)} - 2c^{(2)}.c^{(3)} = 0$$

$$2c^{(1)}.c^{(5)} - 5c^{(2)}.c^{(4)} = 0.$$

De ces deux équations on tirera en faisant $\varepsilon = 1$ et $\beta = -\alpha$, ce qui est permis:

$$\delta = 2 \text{ et } \gamma = -3.$$

On a donc

$$R = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - \alpha x + \alpha.$$

On trouvera de même

$$c = 1,\ c^{(1)} = 1,\ c^{(2)} = -4.\ c^{(3)} = -3\alpha + 12,$$

donc $e^{(1)} = -\frac{2c^{(1)}}{c^{(2)}}.e = \frac{1}{2}e = 1$ en faisant $e = 2$,

$$f^{(3)} = e^{(1)} = 1,\ f^{(2)} = e + e^{(1)} = 3,\ f^{(1)} = e - 2e^{(1)} = 0,$$

$$f = \tfrac{1}{2}c^{(2)}.e + \frac{1}{2.3}c^{(3)}.e^{(1)} = -\frac{\alpha}{2} - 2,\ k = 0,\ A = \tfrac{1}{6};$$

donc

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{(x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha)}} = \tfrac{1}{6}\log\left\{\frac{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}+(x+2)\sqrt{(x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha)}}{x^3+3x^2-2-\frac{\alpha}{2}-(x+2)\sqrt{(x^4+2x^3-3x^2-\alpha x+\alpha)}}\right\}.$$

53. De l'équation $P^2 - 1 = Q^2R$ on tire

$$(P+1).(P-1) = Q^2R = P'^2.Q'^2.R'.R''$$

en faisant $Q = P'.Q'$ et $R = R'.R''$.

On aura donc

$$P + 1 = P'^2R'$$

$$P - 1 = Q'^2R'',$$

d'où l'on tire $P = \frac{1}{2}(P'^2R' + Q'^2R'')$

$$2 = P'^2R' - Q'^2.R''.$$

Cette équation est plus simple que l'équation $P^2 - Q^2R = 1$.

En multipliant par R' on aura

$$(P'R')^2 - Q'^2 R = 2R'.$$

On peut donc mettre $P'R'$ et Q' à la place de P et Q dans l'expression: $\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$; mais il faut observer que A change de valeur, à moins que R' ne soit constant, comme dans l'exemple précèdent.

Pour montrer l'usage de l'équation

$$2 = P'^2 R' - Q'^2 R'',$$

soit $$R' = x^2 + 2qx + p,\ R'' = x^2 + 2q'x + p'$$
et P' et Q' deux constants.

On aura

$$2 = pP'^2 - p'Q'^2 + 2(qP'^2 - q'Q'^2)x + (P'^2 - Q'^2).x^2,$$

donc $$P'^2 = Q'^2,\ q = q',\ 2 = pP'^2 - p'Q'^2,$$

et de là $$P' = Q' = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(p-p')}}$$

$$P = P'^2 R' - 1 = \frac{2}{p-p'}.(x^2 + 2qx + p) - 1 = \frac{2x^2 + 4qx + p + p'}{p-p'}$$

$$Q = P'Q' = P'^2 = \frac{2}{p-p'},\ k = \tfrac{1}{2}.\frac{f^{(1)}}{e} = \tfrac{1}{2}.\frac{\left(\frac{4q}{p-p'}\right)}{\left(\frac{2}{p-p'}\right)} = q,\ A = \tfrac{1}{4};$$

donc

$$\int\frac{(x+q)dx}{\sqrt{[(x^2+2qx+p)(x^2+2q'x+p')]}} = \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{2x^2+4qx+p+p'+2\sqrt{R}}{2x^2+4qx+p+p'-2\sqrt{R}}\right)$$

ce qu'on peut aisément vérifier en faisant $x + q = y$.

Soit maintenant

$$P' = \frac{x+m}{c},\quad Q' = \frac{x+m'}{c}.$$

On aura

$$2c^2 = (x^2 + 2mx + m^2)(x^2 + 2qx + p) - (x^2 + 2m'x + m'^2)(x^2 + 2q'x + p')$$

d'où l'on tire

$$2c^2 = m^2 p - m'^2 p'$$

$$0 = m^2 q - m'^2 q' + mp - m'p'$$

$$0 = p - p' + 4mq - 4m'q' + m^2 - m'^2$$

$$0 = q - q' + m - m'.$$

Soit $q + q' = r$,

on aura $2q = r + m' - m$

$$2q' = r + m - m'$$

$$p = \tfrac{1}{2}r(3m' - m) + \tfrac{1}{2}m^2 - \tfrac{1}{2}m'^2 - mm'$$

$$p' = \tfrac{1}{2}r(3m - m') + \tfrac{1}{2}m'^2 - \tfrac{1}{2}m^2 - mm'$$

$$2c^2 = \tfrac{1}{2}r(m' - m)^3 + \tfrac{1}{2}(m - m')(m^3 - m^2m' - m'^2m + m'^3).$$

Par là on obtiendra

$$P = P'^2R' - 1 = \frac{(x^2 + 2mx + m^2)(x^2 + 2qx + p) - c^2}{c^2},$$

$$Q = P'Q' = \frac{x^2 + (m + m')x + mm'}{c^2},$$

donc $e = \dfrac{mm'}{c^2}$, $f^{(1)} = \dfrac{2mp + 2m^2q}{c^2}$, $n = 2$,

et de là $k = \dfrac{1}{(n+2)\sqrt{\varepsilon}} \cdot \dfrac{f^{(1)}}{e} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{2mp + 2m^2q}{mm'}$;

or $2mp = r(3mm' - m^2) + m^3 - m'^2m - 2m^2m'$

$$2m^2q = rm^2 + m'm^2 - m^3,$$

donc $2mp + 2m^2q = 3rmm' - m'^2m - m^2m'$

et par là $k = \tfrac{1}{4}(3r - m' - m)$.

L'intégrale cherchée a donc la forme

$$\int \frac{(x + k)dx}{\sqrt{R}}.$$

Soit $k = 0$, on aura $r = \dfrac{m + m'}{3}$,

donc $2q = \tfrac{4}{3}m' - \tfrac{2}{3}m$, $2q' = \tfrac{4}{3}m - \tfrac{2}{3}m'$,

de là $m = 2q' + q$, $m' = 2q + q'$

$$3m' - m = 5q + q',\ 3m - m' = 5q' + q$$

$$\tfrac{1}{2}m^2 = 2q'^2 + 2qq' + \tfrac{1}{2}q^2,\ \tfrac{1}{2}m'^2 = 2q^2 + 2qq' + \tfrac{1}{2}q'^2$$

$$mm' = 5qq' + 2q^2 + 2q'^2,\ r = q + q';$$

donc $p = \dfrac{q + q'}{2}(5q + q') - \tfrac{1}{2}q'^2 - \tfrac{7}{2}q^2 - 5qq'$;

c'est-à-dire $p = -q^2 - 2qq'$

de même $p' = -q'^2 - 2qq'$.

On a donc en substituant

$$R = (x^2 + 2qx - q^2 - 2qq')(x^2 + 2q'x - q'^2 - 2qq')$$

et $$\int \frac{x \, . \, dx}{\sqrt{[(x^2+2qx-q^2-2qq')(x^2+2q'x-q'^2-2qq')]}} = \tfrac{1}{4}\log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right),$$

où
$$P = (x^2 + 2qx - 2qq')(x + q + 2q')$$
$$Q = x + q' + 2q$$
ou bien
$$\int \frac{xdx}{\sqrt{[(x^2+2qx-q^2-2qq')(x^2+2q'x-q'^2-2qq')]}}$$
$$= \tfrac{1}{4}.\log\left(\frac{(x+q+2q')\sqrt{(x^2+2qx-q^2-2qq')}+(x+q'+2q)\sqrt{(x^2+2q'x-q'^2-2qq')}}{(x+q+2q')\sqrt{(x^2+2qx-q^2-2qq')}-(x+q'+2q)\sqrt{(x^2+2q'x-q'^2-2qq')}}\right).$$

54. *Seconde méthode.*

Dans ce qui précède nous avons réduit la résolution de l'équation
$$P^2 - Q^2R = 1$$
à la résolution d'un système d'équations linéaires; mais comme l'élimination des inconnus entre ces équations est assez laborieuse, et qu'on a de la peine à en déduire un résultat général, je vais donner une autre méthode pour la résolution de cette équation, qui n'ait pas les inconvéniens de la précédente, et qui donne une relation générale qui doit avoir lieu entre les quantités constantes dans R, pour que l'équation proposée soit résoluble.

Soit r^2 le plus grand carré parfait contenu dans R, on peut faire
$$R = r^2 + s$$
où r est du second degré et s du premier.

En substituant cette valeur de R dans l'équation proposée, elle deviendra
$$P^2 - Q^2r^2 - Q^2s = 1.$$
Il est clair que le premier coefficient de P doit être le même que le premier coefficient de Qr; on peut donc faire
$$P = Qr + Q_1,$$
le degré de Q_1 étant moindre que celui de P. En substituant cette valeur de P on aura:
$$Q_1^2 + 2QQ_1r - Q^2s = 1.$$
Soit Q du degré n, il est clair que Q_1 est du degré $n - 1$. Soit maintenant v la plus grande fonction entière contenue dans $\frac{r}{s}$, il est clair qu'on a
$$r = sv + u,$$
v étant du premier degré et u une constante. En mettant cette valeur au lieu de r dans l'équation ci-dessus, on obtiendra
$$Q_1^2 + 2QQ_1u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1.$$
On voit sans peine qu'en faisant
$$Q = 2vQ_1 + Q_2,$$
le degré de Q_2 devient moindre que celui de Q.

En substituant on aura

$$(1+4uv).Q_1^2+2Q_1Q_2(u-sv)-s.Q_2^2=1,$$

ou bien
$$s_1Q_1^2-2r_1Q_1Q_2-sQ_2^2=1,$$
en faisant
$$s_1=1+4uv,\ r_1=r-2u.$$
Puisque le degré de Q_2 est moindre que n, il est aisé de voir que Q_2 est du degré $n-2$.

Cela posé, soit

$$r_1=s_1v_1+u_1$$

u_1 étant une constante, on aura

$$s_1Q_1(Q_1-2v_1Q_2)-2Q_1Q_2u_1-sQ_2=1;$$

donc en faisant
$$Q_1=2v_1Q_2+Q_3,$$
Q_3 sera d'un degré moindre que celui de Q_1.

En substituant on aura

$$s_1Q_3^2+2r_2Q_2Q_3-s_2Q_2^2=1,$$

en faisant $s_2=s+4u_1v_1$, $r_2=r_1-2u_1$, et où Q_3 est du degré $n-3$.

Cette équation est semblable à la précédente d'où il suit qu'on peut la réduire de la même manière à l'équation

$$s_3.Q_3^2-2r_3Q_3Q_4-s_2Q_4^2=1,$$

dans laquelle on a

$$r_2=v_2s_2+u_2, \qquad u_2 \text{ étant constant}$$
$$Q_2=2v_2Q_3+Q_4, \qquad Q_4 \text{ étant du degré } n-4$$
$$s_3=s_1+4u_2v_2, \qquad r_3=r_2-2u_2.$$

En réduisant cette équation de la même manière, et ainsi de suite, on parviendra enfin à une équation qui, dans le cas où n est un nombre pair $=2\alpha$, sera de la forme:

$$s_{2\alpha-1}.Q^2{}_{2\alpha+1}+2r_{2\alpha}.Q_{2\alpha}.Q_{2\alpha+1}-s_{2\alpha}.Q^2{}_{2\alpha}=1,$$

et si n est un nombre impair $=2\alpha'+1$, elle sera de la forme

$$s_{2\alpha'+1}.Q^2{}_{2\alpha'+1}-2r_{2\alpha'+1}.Q_{2\alpha'+1}.Q_{2\alpha'+2}-s_{2\alpha'}.Q^2{}_{2\alpha'+2}=1.$$

$Q_{2\alpha+1}$ est d'un degré moindre que celui de $Q_{2\alpha}$, et $Q_{2\alpha'+2}$ est d'un degré moindre que celui de $Q_{2\alpha'+1}$. Maintenant $Q_{2\alpha}$ est du degré $n-2\alpha=0$, donc $Q_{2\alpha}$ est une quantité constante; donc $Q_{2\alpha+1}=0$; on a donc

$$-s_{2\alpha}.Q^2{}_{2\alpha}=1.$$

Si $n=2\alpha'+1$, on aura de même

$$s_{2\alpha'+1}.Q^2{}_{2\alpha'+1}=1;$$

donc en général

$$s^n . Q^2{}_n = (-1)^{n+1}$$

Q_n étant une quantité constante.

De là il suit aussi que s_n est une quantité constante.

Donc

"Toutes les fois que l'équation

$$P^2 - Q^2 R = 1$$

est résoluble en fonctions entières, il faut que l'une de quantités

$$s, s_1, s_2, s_3, s_4, \text{etc.}$$

soit constante, et rèciproquement. De plus si s_n est la première des quantités s, s_1, s_2, etc. qui est constante, P est du degré $n+2$ et Q du degré n."

Il suit de là que pour trouver toutes les valeurs que R peut avoir, il faut faire successivement s, s_1, s_2, s_3, etc. égal à une quantité constante.

55. Il s'agit maintenant de déterminer les quantités s_1, s_2, s_3 etc. r_1, r_2, r_3, etc. v_1, v_2, v_3, etc. u_1, u_2, u_3, etc.

Les équations desquelles on doit les déduire, ont, comme on voit par ce qui précède, les formes suivantes:

$$s_m = s_{m-2} + 4u_{m-1} . v_{m-1} \quad \ldots \quad (1)$$

$$r_m = r_{m-1} - 2u_{m-1} \quad \ldots \quad (2)$$

$$r_m = s_m v_m + u_m \quad \ldots \quad (3)$$

On peut de ces équations déduire une autre qui est de la plus grande utilité dans cette recherche.

En multipliant la première des équations précédentes par s_{m-1} on aura:

$$s_{m-1} . s_m = s_{m-2} . s_{m-1} + 4u_{m-1} . v_{m-1} . s_{m-1}.$$

De la seconde équation on tire

$$2u_{m-1} = r_{m-1} - r_m;$$

donc en substituant

$$s_{m-1} . s_m = s_{m-2} . s_{m-1} + (r_{m-1} - r_m) . 2v_{m-1} . s_{m-1}.$$

De l'équation (3) on tire en mettant $m-1$ au lieu de m et en multipliant par 2,

$$2r_{m-1} = 2s_{m-1} . v_{m-1} + 2u_{m-1}.$$

En ajoutant cette équation à l'équation (2) on aura

$$2v_{m-1} . s_{m-1} = r_{m-1} + r_m.$$

On aura donc

$$s_{m-1}.s_m = s_{m-1}.s_{m-2} + (r_{m-1} + r_m)(r_{m-1} - r_m);$$

c'est-à-dire $$s_{m-1}.s_m + r^2{}_m = s_{m-1}.s_{m-2} + r^2{}_{m-1}.$$

Il suit de là que la quantité

$$s_{m-1}.s_m + r^2{}_m$$

est indépendante de m; donc on aura

$$s_{m-1}.s_m + r^2{}_m = ss_1 + r_1^2;$$

mais $s_1 = 1 + 4uv$ et $r_1 = r - vu$;

donc $$ss_1 + r_1^2 = s + r^2 + 4u(vs - r + u);$$

mais $vs = r - u$, donc

$$ss_1 + r_1^2 = r^2 + s = R.$$

Donc on aura quel que soit m

$$s_{m-1}.s_m + r^2{}_m = r^2 + s = R \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

ce qui est bien remarquable.

56. Faisons dans l'équation précédente $m = n$, on aura

$$\mu.s_{n-1} + r^2{}_n = r^2 + s,$$

en supposant $s_n = \text{const.} = \mu$.

De cette équation on tire

$$r_n = r,\ s_{n-1} = \frac{s}{\mu}.$$

On a de même

$$s_{n-1}.s_{n-2} + r^2{}_{n-1} = r_1^2 + ss_1 = r^2 + s;$$

donc $$\frac{s}{\mu}(s_{n-2} - \mu s_1) = r_1^2 - r^2{}_{n-1};$$

donc $s_{n-2} = \mu s_1$ si $r_{n-1} = r_1$, ce qui est vrai, car on a

$$r_n = s_n v_n + u_n = \mu v_n + u_n,$$

d'où $$v_n = \frac{r_n}{\mu},\ \text{et } u_n = 0.$$

Maintenant

$$r_{n-1} = s_{n-1}.v_{n-1} + u_{n-1} = \frac{s}{\mu}.v_{n-1} + u_{n-1};$$

or $$r_{n-1} = r_n + 2u_{n-1} = r + 2u_{n-1};$$

donc $$r = \frac{s}{\mu}.v_{n-1} - u_{n-1};$$

mais $$r = sv + u;$$

donc $$v_{n-1} = \mu v,\quad u_{n-1} = -u;$$

donc $$r_{n-1} = sv - u = r - 2u = r_1;$$

et par conséquent $$s_{n-2} = \mu s_1.$$

On démontre de la même manière que

$$r_{n-k} = r_k$$
$$s_{n-k} = s_{k-1} \cdot \mu^{\pm 1}$$
$$v_{n-k} = v_{k-1} \cdot \mu^{\mp 1}$$
$$u_{n-k} = - u_{k-1}.$$

Le signe supérieur à lieu si k est pair, et l'inférieur si k est impair.

Soit n un nombre impair $= 2\alpha + 1$, on aura en faisant $k = \alpha + 1$

$$r_\alpha = r_{\alpha+1}$$
$$s_\alpha = s_\alpha \cdot \mu^{\pm 1}$$
$$v_\alpha = v_\alpha \cdot \mu^{\mp 1}$$
$$u_\alpha = - u_\alpha,$$

donc $\mu = 1$. Donc si n est un nombre impair on a

$$s_{n-k} = s_{k-1}$$
$$v_{n-k} = v_{k-1}.$$

On a aussi $u_\alpha = 0$.

Donc:

"Toutes les fois que l'équation $P^2 - Q^2 R = 1$ est résoluble en supposant Q une fonction d'un degré impair $2\alpha + 1$, on a

$$u_\alpha = 0."$$

L'inverse a aussi lieu, ce qu'il est aisé de voir.

Lorsque n est un nombre pair $= 2\alpha$, on a

$$u_{\alpha-1} + u_\alpha = 0$$

pour condition de la résolubilité de l'équation $P^2 - Q^2 R = 1$. On voit aisément que ces conditions sont bien plus simples que la condition mentionnée plus haut que s_n doit être une quantité constante.

57. Connaisant la valeur de Q_n par l'équation

$$s_n \cdot Q^2{}_n = (-1)^{n+1},$$

on aura les valeurs de P et Q par les équations suivantes:

$$Q_{n-1} = 2r_{n-1} \cdot Q_n$$
$$Q_{n-2} = 2v_{n-2} \cdot Q_{n-1} + Q_n$$
$$Q_{n-3} = 2v_{n-3} \cdot Q_{n-2} + Q_{n-1}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$Q \quad = 2v_1 Q_2 + Q_3$$

$$Q = 2v\, Q_1 + Q_2$$
$$P = r\, Q + Q_1.$$

La forme de ces équations donne lieu à exprimer la quantité $\frac{P}{Q}$ par une fraction continue.

En effet il est aisé de voir qu'on a:

$$\frac{P}{Q} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cfrac{1}{2v_3 + \cdots + \cfrac{1}{2v_{n-2} + \cfrac{1}{2v_{n-1}}}}}}}.$$

On a donc P et Q en transformant cette fraction en fraction ordinaire.

De cette expression on peut aussi déduire la valeur de $\sqrt{R}$ en fraction continue. En effet en posant n infini on a $\frac{P}{Q} = \sqrt{R}$, donc

$$\sqrt{R} = r + \cfrac{1}{2v + \cfrac{1}{2v_1 + \cfrac{1}{2v_2 + \cfrac{1}{2v_3 + \textit{in inf.}}}}}$$

Dans le cas où l'équation $P^2 - Q^2 R = 1$ est résoluble, cette fraction prend une forme remarquable, car elle devient dans ce cas périodique; d'où il est aisé de se convaincre par ce qu'on a vu précédemment.

On voit aussi que si Q est du degré n, les quantités v, v_1, v_2, v_3 etc. sont du premier degré, excepté

$$v_n,\; v_{2n+1},\; v_{3n+2}, \ldots v_{kn-k+1} \text{ etc.}$$

qui sont toutes du second degré. En effet

$$v_n = v_{3n+2} = \ldots = v_{(2k+1)n+2k} = \frac{r}{\mu}$$

$$v_{2n+1} = v_{4n+3} = \ldots = v_{2kn+2k-1} = r.$$

58. Je vais maintenant déterminer les quantités r_m, μ_m, s_m et v_m pour toute valeur de m.

Soit pour cela

$$r_m = x^2 + ax + b_m$$
$$s_m = c_m + p_m x$$
$$v_m = (g_m + x) \cdot \frac{1}{p_m} \cdot$$

a est le même pour toute valeur de m, ce qu'il est aisé de voir. En substituant ces valeurs de r_m, s_m, et v_m dans les équations (1), (2) et (3), on aura:

$$c_m + p_m x = c_{m-2} + p_{m-2} x + 4u_{m-1}(x + g_{m-1}) \cdot \frac{1}{p_{m-1}}$$
$$x^2 + ax + b_m = x^2 + ax + b_{m-1} - 2u_{m-1}$$
$$x^2 + ax + b_m = (c_m + p_m x)(g_m + x) \cdot \frac{1}{p_m} + u_m.$$

De ces équations on tire sans peine:

$$c_m = c_{m-2} + 4 \cdot \frac{u_{m-1} \cdot g_{m-1}}{p_{m-1}}$$
$$p_m = p_{m-2} + 4 \cdot \frac{u_{m-1}}{p_{m-1}}$$
$$b_m = b_{m-1} - 2u_{m-1}$$
$$g_m = a - \frac{c_m}{p_m}$$
$$u_m = b_m - \frac{c_m g_m}{p_m}$$
$$b_m = -b_{m-1} + 2 \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right).$$

Au moyen de ces équations on peut successivement déterminer toutes les quantités

$$c_m,\ u_m,\ g_m,\ p_m \text{ et } b_m;$$

mais en les combinant avec l'équation (4) on les déterminera de la plus simple manière.

Cette équation donne:

$$(c_{m-1} + p_{m-1}x)(c_m + p_m x) + (x^2 + ax + b_m)^2 = (x^2 + ax + b)^2 + c + px$$

d'où l'on tire

$$c_{m-1} \cdot c_m = c + b^2 - b^2_m$$
$$p_{m-1} \cdot p_m = 2(b - b_m)$$
$$c_{m-1} \cdot p_m + c_m \cdot p_{m-1} = p + 2a(b - b_m)$$

en multipliant la dernière équation par $c_{m-1} \cdot p_{m-1}$ on aura:

$$c^2_{m-1} \cdot p_m \cdot p_{m-1} + p^2_{m-1} \cdot c_m \cdot c_{m-1} = \big(p + 2a(b - b_m)\big) c_{m-1} \cdot p_{m-1};$$

et en substituant dans cette équation la valeur de $p_m \cdot p_{m-1}$ et de $c_m \cdot c_{m-1}$, il vient

$$2c^2_{m-1}(b - b_m) + p^2_{m-1}(c + b^2 - b^2_m) = \big(p + 2a(b - b_m)\big) c_{m-1} \cdot p_{m-1},$$

et en divisant par p^2_{m-1}

$$2 \cdot \frac{c^2_{m-1}}{p^2_{m-1}} (b - b_m) + c + b^2 - b^2_m = \big(p + 2a(b - b_m)\big) \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}};$$

c'est-à-dire

$$2 \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right)(b - b_m) = c + b^2 - b^2{}_m - p \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}};$$

mais on a

$$2 \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right) = b_m + b_{m-1};$$

donc
$$(b_m + b_{m-1})(b - b_m) = c + b^2 - b^2{}_m - p \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}},$$

ou bien

$$p \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = c + b^2 - b \cdot b_{m-1} - b \cdot b_m + b_m \cdot b_{m-1};$$

et de là

$$p \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = c + (b - b_{m-1})(b - b_m).$$

En substituant cette valeur dans l'équation

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2p \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(ap - p \cdot \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right),$$

on obtiendra

$$p^2(b_m + b_{m-1}) = 2\big(c + (b - b_{m-1})(b - b_m)\big)\big(ap - c - (b - b_{m-1})(b - b_m)\big)$$

Cette équation contient une relation entre b_m et b_{m-1} et des quantités constantes. On peut donc déterminer b_m par b_{m-1}, et ainsi trouver la valeur de b_m par des substitutions successives; mais comme b_m dans cette équation monte au second degré, il est plus facile de se servir de la methode suivante.

En mettant $m - 1$ au lieu de m, on aura:

$$p^2(b_{m-1}+b_{m-2})=2\big(c+(b-b_{m-2})(b-b_{m-1})\big)\big(ap-c-(b-b_{m-2})(b-b_{m-1})\big),$$

ou en développant

$$p^2(b_{m-1}+b_{m-2})=2(ap-2c)(b-b_{m-2})(b-b_{m-1})+2c(ap-c)-2(b-b_{m-2})^2(b-b_{m-1})^2:$$

en retranchant cette équation de celle-ci

$$p^2(b_m+b_{m-1})=2(ap-2c)(b-b_m)(b-b_{m-1})+2c(ap-c)-2(b-b_m)^2(b-b_{m-1})^2,$$

on obtiendra

$$p^2(b_m-b_{m-2})=2(ap-2c)(b-b_{m-1})(b_{m-2}-b_m)-2(b-b_{m-1})^2(b_m-b_{m-2})(b_m+b_{m-2}-2b)$$

et en divisant par $b_m - b_{m-2}$,

$$p^2 = -2(ap - 2c)(b - b_{m-1}) - 2(b - b_{m-1})^2(b_m + b_{m-2} - 2b),$$

d'où l'on tire

$$b_m = 2b - b_{m-2} - \frac{(ap-2c)}{b-b_{m-1}} - \frac{\frac{1}{2}p^2}{(b-b_{m-1})^2}.$$

Voilà l'équation qui détermine b_m.

Si l'on fait $b - b_m = q_m$, on aura

$$q_m = - q_{m-2} + \frac{ap - 2c}{q_{m-1}} + \frac{\frac{1}{2}p^2}{q^2_{m-1}},$$

ou bien

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c) . q_{m-1} - q_{m-2} . q^2_{m-1}}{q^2_{m-1}}.$$

59. Avant de donner l'expression explicite de q_m je veux montrer comment on peut exprimer les quantités u_m, p_m, c_m, et g_m par q_m, q_{m-1} etc.

On a d'abord

$$u_m = \frac{b_m - b_{m+1}}{2} = \frac{1}{2}(q_{m+1} - q_m);$$

on a de même

$$\frac{c_{m-1}}{p_{m-1}} = \frac{c + q_{m-1} . q_m}{p}, \text{ donc}$$

$$\frac{c_m}{p_m} = \frac{c + q_m . q_{m+1}}{p},$$

mais

$$g_m = a - \frac{c_m}{p_m},$$

donc

$$g_m = a - \frac{c + q_m . q_{m+1}}{p}.$$

On a de plus

$$p_m . p_{m-1} = 2(b - b_m) = 2q_m$$

d'où l'on tire

$$p_m = \frac{2q_m}{p_{m-1}} = \frac{2q_m}{2q_{m-1}} . p_{m-2}$$

donc

$$p_{2\alpha} = \frac{q_{2\alpha}}{q_{2\alpha-1}} . \frac{q_{2\alpha-2}}{q_{2\alpha-3}} . \frac{q_{2\alpha-4}}{q_{2\alpha-5}} \cdots \frac{q_2}{q_1} . p$$

$$p_{2\alpha+1} = 2 . \frac{q_{2\alpha+1}}{q_{2\alpha}} . \frac{q_{2\alpha-1}}{q_{2\alpha-2}} . \frac{q_{2\alpha-3}}{q_{2\alpha-4}} \cdots \frac{q_3}{q_2} . \frac{q_1}{p}.$$

Ayant p_m on a aussi c_m, car

$$c_m = (c + q_m . q_{m-1}) . \frac{p_m}{p}.$$

Reprenons maintenant l'équation

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c)q_{m-1} - q_{m-2} . q^2_{m-1}}{q^2_{m-1}}.$$

On peut par cette équation déterminer q_m si l'on connaît q et q_1. Cherchons donc d'abord ces quantités.

On a $q_m = b - b_m$, donc $q = b - b = 0$, et $q_1 = b - b_1$.
Maintenant on a

$$b_m = - b_{m-1} + 2 \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\left(a - \frac{c_{m-1}}{p_{m-1}}\right),$$

donc en faisant $m=1$

$$b_1 = -b + 2\frac{c}{p}\left(a - \frac{c}{p}\right);$$

donc $$q_1 = 2\left[b - a\cdot\frac{c}{p} + \left(\frac{c}{p}\right)^2\right] = 2\cdot\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}.$$

Déterminons maintenant q_m.

On voit que q_m est une fonction rationnelle fractionnaire de a, b, c et p.

Soit donc $$q_m = \frac{y_m}{z_m}$$

y_m et z_m étant deux fonctions entières des quantités a, b, c et p.

En substituant cette valeur on aura:

$$\frac{y_m}{z_m} = \frac{\frac{1}{2}p^2\cdot z_{m-2}\cdot z^2{}_{m-1} + (ap-2c)\cdot y_{m-1}\cdot z_{m-2}\cdot z_{m-1} - y_{m-2}\cdot y^2{}_{m-1}}{y^2{}_{m-1}\cdot z_{m-2}}.$$

Donc on aura

$$z_m = z_{m-2}\cdot y^2{}_{m-1}$$
$$y_m = \tfrac{1}{2}p^2\cdot z_{m-2}\cdot z^2{}_{m-1} + (ap-2c)\cdot y_{m-1}\cdot z_{m-1}\cdot z_{m-2} - y_{m-2}\cdot y^2{}_{m-1}.$$

Par ces équations on déterminera sans peine z_m et y_m par des substitutions successives.

De la première équation on tire

$$z_m = y^2{}_{m-1}\cdot y^2{}_{m-3}\cdot y^2{}_{m-5}\cdots y^2{}_{m-2k+1}\cdot z_{m-2k},$$

donc $$z_{2\alpha} = y^2{}_{2\alpha-1}\cdot y^2{}_{2\alpha-3}\cdot y^2{}_{2\alpha-5}\cdots y_3^2\cdot z_1,$$

$$z_{2\alpha+1} = y^2{}_{2\alpha}\cdot y^2{}_{2\alpha-2}\cdot y^2{}_{2\alpha-4}\cdots y_2^2,$$

deux équations qui donnent z_m par $y_2, y_3, \ldots y_{m-1}$.

Développons les valeurs de quelques-unes des quantités z, z_1, z_2, etc. y, y_1, y_2 etc.

En faisant $m=2$, 3 etc. on aura

$$z_2 = y_1^2$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}p^2 z_1^2 + (ap-2c)y_1 z_1$$
$$z_2 = 4(bp^2 - acp + c^2)^2$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}p^6 + 2(ap-2c).p^2(bp^2 - acp + c^2)$$
$$z_3 = z_1 y_2^2 = p_2 y_2^2$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}p^2 z_1.z_2^2 + (ap-2c).y_2 z_1 z_2 - y_1 y_2^2$$
etc.

Lorsque $c=0$ ces valeurs se simplifient beaucoup, et on aura alors

$$b_1 = -b$$
$$q_1 = 2b = \frac{y_1}{z_1}$$

$$z_2 = y_1^2 = 4b^2$$
$$y_2 = \tfrac{1}{2}p^2 + 2abp + \tfrac{1}{2}p(p+4ab)$$
$$z_3 = y_2^2 = \tfrac{1}{4}p^2(p+4ab)^2$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}p^2 z_2^2 + apy_2 . z_2 - 2by_2^2$$
$$y_3 = \tfrac{1}{2}bp^2(16b^3 - p(p+4ab))$$
$$z_4 = z_2 . y_3^2 = b^4p^4(16b^3 - p(p+4ab))^2$$
$$y_4 = \tfrac{1}{2}p^2 . z_2 . z_3^2 + apy_3 . z_3 . z_2 - y_2 . y_3^2$$
$$y_4 = 4b^5p^5(p+4ab)((p+2ab)(p+4ab) - 8b^3)$$
etc.

Au lieu de faire $c = 0$, supposons maintenant $ap - 2c = 0$, et on aura:

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 - q_{m-2} . q^2{}_{m-1}}{q^2{}_{m-1}}.$$

Si l'on fait $m = 2$, 3, 4 etc. on aura:

$$q_2 = \frac{\frac{1}{2}p^2}{q_1^2},$$

$$q_3 = \frac{\frac{1}{2}p^2 - q_1 . q_2^2}{q_2^2} = \frac{\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4} . \frac{p^4}{q_1^4} . q_1}{\frac{\frac{1}{4}p^4}{q_1^4}},$$

$$q_3 = \frac{2q_1^4 - q_1p^2}{p^2} = q_1 . \frac{2q_1^3 - p^2}{p^2},$$

$$q_4 = \frac{\frac{1}{2}p^2 - q_2 . q_3^2}{q_3^2} = \frac{p^2[p^4 - (2q_1^3 - p^2)^2]}{2q_1^2(2q_1^3 - p^2)^2},$$

$$q_4 = \frac{2p^2q_1(p^2 - q_1^3)}{(2q_1^3 - p^2)^2},$$

$$q_5 = \frac{(2q_1^3 - p^2)(4q_1^6 - 2q_1^3p^2 - p^4)}{8q_1^2(p^2 - q_1^3)^2}.$$

60. Appliquons maintenant ce qui précède à l'intégrale

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2+c+px]}}.$$

Pour rendre les résultats plus simples, je fais $c = 0$, ce qui est permis, comme on le voit aisément.

On a $$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2+px]}} = \frac{1}{2n+4} . \log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$$

ou bien puisque $$P^2 - Q^2R = 1,$$

$$\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2+px]}} = \frac{1}{n+2} . \log(P+Q\sqrt{R}).$$

Pour que cette équation soit possible, il faut avant tout que

$$P^2 - Q^2 . R = 1,$$

donc on aura pour condition de l'intégrabilité:

$$s_n = \text{à une quantité constante.}$$

Or on a $$s_n = c_n + p_n x.$$

Il faut donc que $$p_n = 0.$$

Si cette condition est remplie, on peut toujours déterminer k de la manière que $\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2+px]}}$ devienne égale à $\frac{1}{n+2} \cdot \log(P + Q\sqrt{R})$. Cherchons cette valeur de k.

On a vu qu'en faisant

$$P = f + f^{(1)}x + \dots$$
$$Q = e + e^{(1)}x + \dots$$

k est égal à $$\frac{1}{n+2} \cdot \frac{f^{(1)}}{e} \quad \text{(No. 47).}$$

Il s'agit donc de trouver $\frac{f^{(1)}}{e}$.

On a

$$P = rQ + Q_1$$
$$Q = \frac{2}{p}(x+g) \cdot Q_1 + Q_2$$
$$Q_1 = \frac{2}{p_1}(x+g_1) \cdot Q_2 + Q_3$$
$$Q_2 = \frac{2}{p_2}(x+g_2) \cdot Q_3 + Q_4$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$Q_{n-1} = \frac{2}{p_{n-1}}(x+g_{n-1})Q_n$$
$$Q_n = \text{const.}$$

d'ou l'on tire sans peine:

$$e^{(n)} = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3} \cdots \frac{2}{p_{n-1}},$$
$$e^{(n-1)} = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3} \cdots \frac{2}{p_{n-1}} (g + g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1});$$

donc $$\frac{e^{(n-1)}}{e^{(n)}} = g + g_1 + g_2 + g_3 + \dots + g_{n-1}.$$

Maintenant on a:

$$x + k = 2A. \frac{(n+2).f^{(n+2)}.x^{n+1} + (n+1).f^{(n+1)}.x^n + \dots}{e^{(n)}.x^n + e^{(n-1)}.x^{n-1} + \dots};$$

donc

$$(x+k)(e^{(n)}.x^n + e^{(n-1)}.x^{n-1} + \dots) = 2A.(n+2).f^{(n+2)}.x^{n+1} + 2A.(n+1).f^{(n+1)}.x^n + \dots$$

donc $$e^{(n)}.k + e^{(n-1)} = 2A.(n+1).f^{(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}.f^{(n+1)};$$

or $$f^{(n+1)} = e^{(n-1)} + a.e^{(n)} \quad \text{(No. 50)}$$

donc $$e^{(n)}.k + e^{(n-1)} = \frac{n+1}{n+2}.e^{(n-1)} + \frac{n+1}{n+2}.a.e^{(n)},$$

donc $$k = \frac{n+1}{n+2}.a - \frac{1}{n+2}.\frac{e^{(n-1)}}{e^{(n)}},$$

et par suite $$k = \frac{n+1}{n+2}a - \frac{1}{n+2}(g + g_1 + g_2 + \dots + g_{n-1}).$$

On peut aussi exprimer k d'une autre manière.

On a $g_m = a - \frac{c_m}{p_m}$; donc en substituant et remarquant que $c_{n-1} = c = 0$,

$$k = \frac{1}{n+2}.a + \frac{1}{n+2}\left(\frac{c_1}{p_1} + \frac{c_2}{p_2} + \frac{c_3}{p_3} + \dots + \frac{c_{n-2}}{p_{n-2}}\right).$$

61. On a vu que l'équation

$$p_n = 0$$

contient la condition pour que

$$\int\frac{(x+k).dx}{\sqrt{R}} \text{ soit } = 2A.\log(P + Q\sqrt{R}).$$

Cette condition équivaut à celle-ci:

$$q_n = 0,$$

car on a $$p_n.p_{n-1} = 2q_n. \quad \text{(No. 58)}$$

On a aussi dans le même cas $q_{n-k} = q_{k-1}$.

En combinant cela avec tout ce qu'on a vu précédemment, on en déduira la règle suivante pour trouver toutes les intégrales de la forme:

$$\int\frac{(x+k)dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2+px+c]}}$$

qui puissent s'exprimer par la fonction logarithmique

$$2A.\log\left[P + Q\sqrt{((x^2+ax+b)^2+px+c)}\right],$$

savoir:

"On calcule toutes les quantités q_2, q_3, q_4, etc. d'après la formule

$$q_m = \frac{\frac{1}{2}p^2 + (ap - 2c)q_{m-1} - q_{m-2}.q^2_{m-1}}{q^2_{m-1}}$$

en supposant $q = 0$ et $q_1 = 2.\frac{bp^2 - acp + c^2}{p^2}$.

Puis on fait successivement

$$q_1 = 0,\ q_2 = 0,\ q_3 = 0, \dots q_n = 0 \text{ etc.}$$

où en général $$q_{n-k} = q_{k-1}$$

en donnant a n toutes les valeurs possibles.

Cela posé, on aura toutes les valeurs que R peut avoir en éliminant entre ces équation et l'équation $R=0$ une des quantités a, p, b et c.

Ayant trouvé R on a

$$k=\frac{1}{n+2}a+\frac{1}{n+2}\left(\frac{c}{p}+\frac{c_1}{p_1}+\frac{c_2}{p_2}+\cdots+\frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}\right)$$

où l'on a

$$\frac{c_m}{p_m}=\frac{c+q_m\,.\,q_{m-1}}{p}.$$

Faisant ensuite

$$p_{2\alpha}=\frac{q_{2\alpha}}{q_{2\alpha-1}}\cdot\frac{q_{2\alpha-2}}{q_{2\alpha-3}}\cdots\frac{q_2}{q_1}\cdot p$$

$$p_{2\alpha+1}=\frac{q_{2\alpha+1}}{q_{2\alpha}}\cdot\frac{q_{2\alpha-1}}{q_{2\alpha-2}}\cdots\frac{q_3}{q_2}\cdot\frac{q_1}{p}$$

$$g_m=a-\frac{c+q_m\,q_{m-1}}{p}$$

on aura les valeurs de P et de Q en tranformant la fraction continue

$$\frac{P}{Q}=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+g}{p}+\cfrac{1}{\cfrac{x+g_1}{p_1}+\cfrac{1}{\cfrac{x+g_2}{p_2}+\cdots+\cfrac{1}{\cfrac{x+g_{n-2}}{p_{n-2}}+\cfrac{1}{\cfrac{x+g_{n-1}}{p_{n-1}}}}}}}$$

en fraction ordinaire, savoir en supposant $q_{n-k}=q_{k-1}$. Ces valeurs trouvées, on a enfin

$$\int\frac{(x+k).dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2+c+px]}}=\frac{1}{n+2}\log\left[P+Q\sqrt{((x^2+ax+b)^2+c+px)}\right]."$$

La résolution du problème dépend donc du calcul des quantités q_1, q_2, q_3, q_4, etc. Les valeurs de z_1, y_1, z_2, y_2, z_3, y_3, etc. trouvées dans le numéro 59, donnent immédiatement dans la supposition de $c=0$, quelques-unes de ces quantités. Les voici

$$q=0$$

$$q_1=2b$$

$$q_2=\frac{p(p+4ab)}{8b^2}$$

$$q_3 = \frac{2b[16b^3 - p(p+4ab)]}{(p+4ab)^2}$$

$$q_4 = \frac{4bp(p+4ab)(p^2+6abp+8a^2b^2-8b^3)}{[16b^3 - p(p+4ab)]^2}.$$

62. Prenons maintenant quelques exemples.

1. Soit $n = 1$.

Dans ce cas on a $q_1 = 0$; c'est-à-dire $b = 0$;

donc $$k = \tfrac{1}{3}a \text{ et } g = a.$$

On a par là

$$\frac{P}{Q} = x^2 + ax + \cfrac{1}{\cfrac{x+a}{p}} = \frac{(x+a)^2 . x + p}{x+a};$$

donc $$P = (x+a)^2 x + p, \quad Q = x + a;$$

donc enfin

$$\int \frac{(x+\frac{1}{3}a)dx}{\sqrt{[(x^2+ax)^2+px]}} = \tfrac{1}{3}\log\left[(x+a)^2 x + p + (x+a)\sqrt{((x^2+ax)^2+px)}\right].$$

2. Soit $n = 2$.

On a $q_2 = 0$; donc $p = -4ab$, $k = \frac{1}{4}a$; on aura donc

$$\int \frac{(x+\frac{1}{4}a)dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2-4abx]}} = \tfrac{1}{4}\log(P + Q\sqrt{R}).$$

3. Soit $n = 3$.

On a $q_3 = 0$, donc $p^2 + 4abp = 16b^3$, d'où l'on tire

$$p = -2b(a \pm \sqrt{(a^2+4b)})$$

$$k = \tfrac{1}{5}a + \tfrac{1}{5} \cdot \frac{c_1}{p_1}$$

$$\frac{c_1}{p_1} = \frac{q_1 q_2}{p} = \frac{q_1^2}{p} = \frac{4b^2}{p} = \tfrac{1}{2}\left(a \mp \sqrt{(a^2+4b)}\right);$$

donc $$k = \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{3}{2}a \mp \tfrac{1}{2}\sqrt{(a^2+4b)}\right).$$

On aura donc

$$\int \frac{[x+\frac{1}{10}(3a - \sqrt{(a^2+4b)})]dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2 - 2b(a+\sqrt{(a^2+4a)})x]}} = \tfrac{1}{5}\log(P + Q\sqrt{R}).$$

Nous avons supposé dans ces exemples $c = 0$, mais il est clair qu'on obtiendra les intégrales les plus générales en mettant $x + \alpha$ au lieu de x, α étant une quantité indéterminée.

Problème IVme.

Trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{x+k}{x+l} \cdot \frac{dx}{\sqrt{R}}$ *qui peuvent s'exprimer par la fonction logarithmique* $A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

63. Ce problème est dans le fond un cas particulier du problème IIme, mais comme sa résolution est très importante dans la théorie des fonctions elliptiques, je veux en donner une autre au moyen du problème précédent.

Soit

$$\int \frac{(y+k')dy}{\sqrt{R'}} = A'.\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}\right)$$

l'intégrale la plus générale qu'on puisse exprimer par l'expression

$$A'.\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}\right).$$

En substituant $\frac{1}{x+l}$ au lieu de y, on aura

$$y+k' = k' + \frac{1}{x+l} = \frac{k'x+k'l+1}{x+l} = \frac{k'\left(x+l+\frac{1}{k'}\right)}{x+l} = \frac{k'(x+k)}{x+l}$$

en faisant $k = l + \frac{1}{k'}$.

On a de même $dy = -\frac{dx}{(x+l)^2}$.

Soit

$$R' = (y^2+ay+b)^2 + c + py,$$

on aura

$$R' = \left(\frac{1}{(x+l)^2} + \frac{a}{x+l} + b\right)^2 + c + \frac{p}{x+l},$$

$$R' = \frac{[1+a(x+l)+b(x+l)^2]^2 + p(x+l)^3 + c(x+l)^4}{(x+l)^4};$$

donc

$$\sqrt{R'} = \frac{\sqrt{[(1+a(x+l)+b(x+l)^2)^2 + p(x+l)^3 + c(x+l)^4]}}{(x+l)^2} = \frac{\sqrt{R}}{(x+l)^2}.$$

Désignons par $\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}$ ce que deviendra $\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}$ en substituant $\frac{1}{x+l}$ au lieu de y, on aura:

$$-k'.\int \frac{(x+k)dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A'.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right),$$

ou, en faisant $-\frac{A'}{k'} = A$,

$$\int\frac{x+k}{x+l}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}=A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

Cette intégrale est maintenant l'intégrale cherchée la plus générale, ce qu'il est aisé de voir.

Il faut maintenant déterminer l.

On a

$$R=\left(1+(x+l)a+(x+l)^2b\right)^2+p(x+l)^3+c(x+l)^4,$$

c'ést-à-dire

$$R=1+2a(x+l)+(a^2+2b)(x+l)^2+(2ab+p)(x+l)^3+(b^2+c)(x+l)^4,$$

ou $$R=(b^2+c)\,(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)$$

où $$\delta=\left(4(b^2+c).l+2ab+p\right):(b^2+c)$$

$$\gamma=\left(6(b^2+c).l^2+3(2ab+p)l+a^2+2b\right):(b^2+c)$$

$$\beta=\left(4(b^2+c).l^3+3(2ab+p)l^2+2(a^2+2b)l+2a\right):(b^2+c)$$

$$\alpha=\left((b^2+c).l^4+(2ab+p)l^3+(a^2+2b)l^2+2al+1\right):(b^2+c).$$

De ces équations on tire:

$$2ab+p=(b^2+c)\,(\delta-4l)$$

$$a^2+2b=(b^2+c)\,(\gamma-3\delta l+6l^2)$$

$$2a=(b^2+c)\,(\beta-2\gamma l+3\delta l^2-4l^3)$$

$$1=(b^2+c)\,(\alpha-\beta l+\gamma l^2-\delta l^3+l^4);$$

d'où, en faisant

$$\alpha'=\alpha-\beta l+\gamma l^2-\delta l^3+l^4$$

$$\beta'=\beta-2\gamma l+3\delta l^2-4l^3$$

$$\gamma'=\gamma-3\delta l+6l^2$$

$$\delta'=\delta-4l,$$

on tire:

$$a=\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}$$

$$b=-\tfrac{1}{8}\cdot\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}+\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\gamma'}{\alpha'}$$

$$c=\frac{1}{\alpha'}-\tfrac{1}{4}\left(\frac{\gamma'}{\alpha'}-\tfrac{1}{4}\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right)^2$$

$$p=\frac{\delta'}{\alpha'}-\tfrac{1}{2}\cdot\frac{\beta'}{\alpha'}\left(\frac{\delta'}{\alpha'}-\tfrac{1}{4}\frac{\beta'^2}{\alpha'^2}\right).$$

En substituant maintenant ces valeurs de a, b, c et p dans l'équation qui exprime la relation qui a lieu entre ces quantités, on aura une équation entre l, α, β, γ et δ, d'où l'on tirera la valeur de l.

On aura donc enfin

$$\int \frac{(x+k)dx}{(x+l)\sqrt{(x^4+\delta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha)}} = A\sqrt{(b^2+c)}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

De cette équation on tire ensuite

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + (k-l)\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = A.\sqrt{(b^2+c)}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right),$$

d'où

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}} = \frac{1}{l-k}.\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{A.\sqrt{(b^2+c)}}{l-k}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right);$$

et de cette manière on obtiendra toutes les intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{(x+l)\sqrt{R}}$$

qui peuvent être exprimées par l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$ et la fonction logarithmique $A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)$.

En mettant $-l$ au lieu de l, on aura

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{l+k}.\int \frac{dx}{\sqrt{R}} + \frac{A\sqrt{(b^2+c)}}{l+k}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right),$$

ou bien, comme on a vu No. 45,

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{l+k}.\int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{(2n+4)\sqrt{(\alpha+\beta l+\gamma l^2+\delta l^3+l^4)}}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

Si l'on suppose $k+l=\frac{1}{k'}=\infty$, ou $k'=0$, on aura

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{(2n+4)\sqrt{(\alpha+\beta l+\gamma l^2+\delta l^3+l^4)}}.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right).$$

Prenons un exemple.

On a No. 52

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{[x^4+2x^3-3x^2-\alpha'(x-1)]}} = \tfrac{1}{6}\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R'}}{P'-Q'\sqrt{R'}}\right).$$

Soit $x=\frac{1}{y-l}$, on aura

$$xdx = -\frac{dy}{(y-l)^3}$$

$$R = \frac{1+2(y-l)-3(y-l)^2-\alpha'(y-l)^3+\alpha'(y-l)^4}{(y-l)^4},$$

donc $$R = \frac{(y^4+\delta y^3+\gamma y^2+\beta y+\alpha)}{(y-l)^4}.\alpha',$$

d'où l'on tire $$\delta = -1-4l$$

$$\gamma = (-3+3\alpha' l+6\alpha' l^2):\alpha'$$

$$\beta = (2 + 6l - 3\alpha' l^2 - 4\alpha' l^3) : \alpha'$$

$$\alpha = (1 - 2l - \quad 3l^2 + \alpha' l^3 + \alpha' l^4) : \alpha';$$

donc
$$l = -\frac{1+\delta}{4}, \quad \alpha' = \frac{3}{6l^2 + 3l - \gamma}, \text{ etc.}$$

En faisant $l = 0$ on aura

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{[1 + 2x - 3x^2 - \alpha(x^3 - x^4)]}} = -\tfrac{1}{6} \log \left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right),$$

or
$$P' = x^3 + 3x^2 - 2 - \frac{\alpha}{2}, \qquad Q' = x + 2;$$

donc
$$P = 1 + 3x - \left(2 + \frac{\alpha}{2}\right)x^3, \quad Q = 1 + 2x.$$

Dans le problème troisième j'ai donné une méthode de trouver toutes les intégrales de la forme $\int \frac{(x+k)dx}{\sqrt{R}}$ qui peuvent être exprimées par la fonction logarithmique $A.\log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right)$. Dans la suite de la théorie des transcendantes elliptiques je montrerai comment on peut trouver une infinité d'autres intégrales de la même forme, intégrables par d'autres fonctions logarithmiques qui sont toutes composées de termes de la forme $A.\log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right)$, comme nous avons vu à la tête de ce chapitre.

CHAPITRE III.

Sur une relation remarquable qui existe entre plusieurs intégrales de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}, \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}} \text{ et} \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

64. Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'il est en général impossible d'exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ par les intégrales $\int \frac{dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{R}}$, $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{R}}$; néanmoins si l'on prend cette intégrale entre des limites convenables il est toujours possible d'exprimer l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ par les trois intégrales ci-dessus. Ces limites sont, comme on le verra, les valeurs de x qui rendent $R = 0$.

Soit
$$p = \int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}.$$

En différentiant p par rapport à a on aura

$$\frac{dp}{da} = \int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}.$$

Maintenant on a vu dans le premier chapitre que $\int \frac{dx}{(x-a)^2 \sqrt{R}}$ est toujours réductible à l'intégrale $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.

En effet on a No. 15

$$\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}} = \frac{1}{fa} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} (A + Bx + Cx^2) - \frac{1}{2}\frac{f'a}{fa}\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} - \frac{\sqrt{R}}{(x-a).fa} + \text{const.}$$

où $$A = -\varepsilon a^2 - \tfrac{1}{2}\delta a,\ B = \tfrac{1}{2}\delta,\ C = \varepsilon,\ R = fx.$$

Donc en substituant pour $\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$ et $\int \frac{dx}{(x-a)^2\sqrt{R}}$ leurs valeurs, p et $\frac{dp}{da}$, et prenant les intégrales de manière qu'elles s'évanouissent lorsque $x = r$, r étant une valeur de x qui rend $R = 0 = fx$, on aura:

$$\frac{dp}{da} + \frac{1}{2}\frac{f'a}{fa}.p = \frac{\sqrt{(fx)}}{(a-x).fa} + \frac{1}{fa}\int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} (A + Bx + Cx^2).$$

Cette équation devient intégrable en la multipliant par $\sqrt{(fa)}.da$; car on a alors

$$\sqrt{(fa)}.dp + p.d(\sqrt{(fa)}) = \sqrt{(fx)}.\frac{da}{(a-x)\sqrt{(fa)}} + \frac{da}{\sqrt{(fa)}}.\int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} (A + Bx + Cx^2).$$

En intégrant on aura

$$p.\sqrt{(fa)} - \sqrt{(fx)}.\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(fa)}} = \int \frac{da}{\sqrt{(fa)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} (A + Bx + Cx^2) + \text{const.}$$

Si on prend l'intégrale de $a = r$, on a const. $= 0$,
en remarquant que $A + Bx + Cx^2 = \frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2 - (\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)$.

Maintenant on a

$$\int \frac{da}{\sqrt{(fa)}} \int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} (\tfrac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2 - \tfrac{1}{2}\delta a - \varepsilon a^2)$$
$$= \int \frac{da}{\sqrt{(fa)}} \int \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} \int \frac{(\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}.$$

Donc en substituant cette valeur et remettant la valeur de p on aura l'equation suivante:

$$\sqrt{(fa)}.\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(fx)}} - \sqrt{(fx)}.\int \frac{da}{(a-x)\sqrt{(fa)}}$$
$$= \int \frac{da}{\sqrt{(fa)}} \int \frac{(\frac{1}{2}\delta x + \varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}} - \int \frac{dx}{\sqrt{(fx)}} \int \frac{(\frac{1}{2}\delta a + \varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}} \quad \ldots\ldots (\alpha)$$

Cette équation donne la différence entre les deux intégrales $\sqrt{(fa)}.\int \frac{dx}{(x-a)\sqrt{(fx)}}$

et $\sqrt{(fx)}\,.\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(fa)}}$ exprimée par des intégrales de la forme $\int\frac{dy}{\sqrt{(fy)}}$ et $\int\frac{(\frac{1}{2}\delta y+\varepsilon y^2)dy}{\sqrt{(fy)}}$, ce qui est très remarquable.

Supposons maintenant qu'on prenne l'intégrale $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(fx)}}$ de $x=r$ à $x=r'$, r' étant une autre valeur qui rend $fx=0$. On a donc dans ce cas

$$\sqrt{(fa)}\int_r^{r'}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(fx)}}=\int_r\frac{da}{\sqrt{(fa)}}.\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}\quad(\beta)$$

Cette équation montre qu'on peut exprimer l'intégrale définie $\int_r^{r'}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(fx)}}$ par des intégrales de la forme $\int\frac{dy}{\sqrt{(fy)}}$ et $\int\frac{(\frac{1}{2}\delta y+\varepsilon y^2)dy}{\sqrt{(fy)}}$, ce qui est très important dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Soit r'' une troisième valeur qui rend $fx=0$, et supposons $a=r''$, on aura $fa=0$ et

$$\int_r^{r''}\frac{da}{\sqrt{(fa)}}.\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}}=\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\int_r^{r''}\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}\quad\ldots\quad(\gamma)$$

une équation qui exprime une relation entre quatre intégrales définies.

Supposons dans l'équation (α) que x ait une telle valeur que l'intégrale $\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(fa)}}$ puisse être exprimée par des intégrales de la forme $\int\frac{da}{\sqrt{(fa)}}$ et $\int\frac{ada}{\sqrt{(fa)}}$, et soit

$$\int\frac{da}{(a-x)\sqrt{(fa)}}=\int\frac{(A+Ba)da}{\sqrt{(fa)}}+w$$

w étant une fonction logarithmique.

En substituant cette valeur on aura

$$\sqrt{(fa)}.\int_r^{\omega}\frac{dx}{(x-a)\sqrt{(fx)}}=\sqrt{(fx)}.\int_r\frac{(A+Ba).da)}{\sqrt{(fa)}}+\sqrt{(fx)}.w$$
$$+\int_r\frac{da}{\sqrt{(fa)}}.\int_r^{\omega}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2).dx}{\sqrt{(fx)}}-\int_r^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}.$$

Les intégrales sont prises depuis $x=r$ jusqu'à $x=\omega$, ω étant une telle valeur que

$$\int\frac{da}{(a-\omega)\sqrt{(fa)}}=\int\frac{(A+Ba).da}{\sqrt{(fa)}}+w.$$

Supposons de plus qu'on donne à a une telle valeur $a=\omega'$ qui rend

$$\int\frac{dx}{(x-\omega')\sqrt{(fx)}}=\int\frac{(A'+B'x).dx}{\sqrt{(fx)}}+w'$$

w' étant une fonction logarithmique, on aura

$$w'\sqrt{(f\omega')}-w\sqrt{(f\omega)}=\sqrt{(f\omega)}.\int_r^{\omega'}\frac{(A+Ba)da}{\sqrt{(fa)}}-\sqrt{(f\omega')}\int_r^{\omega}\frac{(A'+B'x)dx}{\sqrt{(fx)}}$$

$$+\int_r^{\omega'}\frac{da}{\sqrt{(fa)}}.\int_r^{\omega}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}}-\int_r^{\omega}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\int_r^{\omega'}\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}.$$

65. On peut trouver une relation encore plus générale entre plusieurs intégrales définies de la manière suivante.

Soit s une fonction logarithmique quelconque de la forme

$$A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)+A'.\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}\right)+\dots$$

En prenant la différentielle de cette expression on a, suivant ce qu'on a vu précédemment, un résultat de la forme:

$$ds=\frac{dx}{\sqrt{R}}\left(B+Cx+\frac{L}{x-a}+\frac{L'}{x-a'}+\frac{L''}{x-a''}+\dots\text{ etc.}\right);$$

donc en intégrant

$$s=\int\left(\frac{B+Cx}{\sqrt{R}}\right)dx+L\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}+L'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}}+\dots$$

Prenant ensuite l'intégrale depuis $x=r$ jusqu'à $x=r'$, on a

$$s'-s=\int_r^{r'}\frac{(B+Cx)dx}{\sqrt{(fx)}}$$

$$+\frac{L}{\sqrt{(fa)}}\left(\int_r\frac{da}{\sqrt{(fa)}}.\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2).dx}{\sqrt{(fx)}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}\right)$$

$$+\frac{L'}{\sqrt{(fa')}}\left(\int_r\frac{da'}{\sqrt{(fa')}}.\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}}-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a'+\varepsilon a'^2)da'}{\sqrt{(fa')}}\right)$$

$$+\text{ etc.}$$

ou bien

$$s'-s=\int_r^{r'}\frac{(B+Cx)dx}{\sqrt{(fx)}}$$

$$-\int_r^{r'}\frac{dx}{\sqrt{(fx)}}.\left(\frac{L}{\sqrt{(fa)}}.\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a+\varepsilon a^2)da}{\sqrt{(fa)}}+\frac{L'}{\sqrt{(fa')}}.\int_r\frac{(\frac{1}{2}\delta a'+\varepsilon a'^2)da'}{\sqrt{(fa')}}+\text{etc.}\right)$$

$$+\int_r^{r'}\frac{(\frac{1}{2}\delta x+\varepsilon x^2)dx}{\sqrt{(fx)}}.\left(\frac{L}{\sqrt{(fa)}}.\int_r\frac{da}{\sqrt{(fa)}}+\frac{L'}{\sqrt{(fa')}}.\int_r\frac{da'}{\sqrt{(fa')}}+\dots\text{etc.}\right)$$

Toutes les intégrales qui se trouvent dans cette formule, sont, comme on le voit, de la forme

$$\int\frac{dy}{\sqrt{(fy)}},\ \int\frac{ydy}{\sqrt{(fy)}}\ \text{et}\int\frac{y^2dy}{\sqrt{(fy)}},$$

et l'équation exprime par conséquent une relation tres générale entre un système d'intégrales de cette forme.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{P dx}{\sqrt{R}}$ *à la forme*

$$\int \frac{f(\sin^2\varphi).d\varphi}{\sqrt{(1-c^2.\sin^2\varphi)}}.$$

Voyez Legendre Exercices de calc. int.

Réduction de l'intégrale $\int \frac{f(\sin^2\varphi).d\varphi}{\sqrt{(1-c^2.\sin^2\varphi)}}$

aux intégrales $\int \frac{d\varphi}{\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$, $\int d\varphi.\sqrt{(1-c^2.\sin^2\varphi)}$ et $\int \frac{d\varphi}{(1+n.\sin^2\varphi)\sqrt{(1-c^2\sin^2\varphi)}}$.

Voyez Legendre Exercises de calc. int.

Comparaison des transcendantes elliptiques.

Voyez Legendre Exercises de calc. int.

Evaluation des transcendantes elliptiques par approximation.

Voyez Legendre Exercices de calc. int.

(Ici l'auteur a laissé une feuille blanche dans son cahier pour marquer une lacune, qu'il s'était proposé de remplir; puis il continue comme il suit.

Note de l'éditeur.)

Réduction des transcendantes elliptiques du troisième espèce par rapport au paramètre.

Considérons l'expression

$$\text{arc tang}\left(\frac{P.\sqrt{R}}{Q}\right) = s,$$

en la différentiant on aura

$$ds = \frac{d\left(\frac{P.\sqrt{R}}{Q}\right)}{1+\frac{P^2R}{Q^2}} = \frac{\frac{1}{2}\frac{P}{Q}\cdot\frac{dR}{\sqrt{R}} + \frac{R(QdP-PdQ)}{Q^2.\sqrt{R}}}{1+\frac{P^2.R}{Q^2}},$$

ou bien

$$ds = \frac{\frac{1}{2}PQ.\frac{dR}{dx} + R\left(Q.\frac{dP}{dx} - P.\frac{dQ}{dx}\right)}{Q^2+P^2R}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{M}{N}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Soit $$Q^2 + P^2.R = k(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2$$

$$P = 1 \text{ et } Q = x(a+bx^2).$$

En substituant on aura

$$x^2(a+bx^2)^2 + (1-x^2)(1-c^2x^2) = k(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2.$$

En faisant $x = 1$ et $x = \frac{1}{c}$ on aura

$$(a + b)^2 = k(1 + n)(1 + n_1)^2$$
$$\frac{1}{c^2}\left(a + \frac{b}{c^2}\right)^2 = k\left(1 + \frac{n}{c^2}\right)\left(1 + \frac{n_1}{c^2}\right)^2$$

d'où l'on tire

$$a + b = (1 + n_1)\sqrt{(1 + n)}.\sqrt{k}$$
$$\frac{1}{c}\left(a + \frac{b}{c^2}\right) = \left(1 + \frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{n}{c^2}\right)}.\sqrt{k};$$

donc $b\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) = \left[(1 + n_1)\sqrt{(1 + n)} - c\left(1 + \frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{n}{c^2}\right)}\right].\sqrt{k}$

$$a\left(1 - \frac{1}{c^2}\right) = \left[c\left(1 + \frac{n_1}{c^2}\right)\sqrt{\left(1 + \frac{n}{c^2}\right)} - \frac{1}{c^2}(1 + n_1)\sqrt{(1 + n)}\right].\sqrt{k}.$$

On a de même

$$b^2 = kn.n_1^2$$
$$b = n_1\sqrt{n}.\sqrt{k}.$$

En substituant cette valeur on a

$$-n_1\sqrt{n}\left(\frac{1 - c^2}{c^2}\right) = (1 + n_1)\sqrt{(1 + n)} - \frac{1}{c^2}(c^2 + n_1)\sqrt{(c^2 + n)},$$

ou $n_1(-(1-c^2)\sqrt{n} - c^2\sqrt{(1+n)} + \sqrt{(c^2+n)}) = c^2(\sqrt{(1+n)} - \sqrt{(c^2+n)});$

donc $$n_1 = \frac{c^2[\sqrt{(1 + n)} - \sqrt{(c^2 + n)}]}{-(1 - c^2)\sqrt{n} - c^2\sqrt{(1 + n)} + \sqrt{(c^2 + n)}},$$

ou bien en multipliant en haut et en bas par $\sqrt{(1 + n)} + \sqrt{(c^2 + n)}$ et en réduisant

$$n_1 = \frac{c^2}{n - \sqrt{n}.\sqrt{(n+1)} + \sqrt{[(1+n)(c^2+n)]} - \sqrt{[n(c^2+n)]}};$$

c'est-à-dire

$$n_1 = \frac{c^2}{[\sqrt{n} - \sqrt{(1 + n)}].[\sqrt{n} - \sqrt{(c^2 + n)}]},$$

et en multipliant en haut et en bas par $(\sqrt{n} + \sqrt{(1 + n)})(\sqrt{n} + \sqrt{(c^2 + n)})$,

on aura $n_1 = (\sqrt{(1 + n)} + \sqrt{n})(\sqrt{c^2 + n)} + \sqrt{n}),$

ou enfin $n_1 = n.\left[\sqrt{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} + 1\right]\left[\sqrt{\left(1 + \frac{c^2}{n}\right)} + 1\right].$

On a $k = 1$, donc $b = n_1\sqrt{n}$, $a = (1 + n_1)\sqrt{(1 + n)} - n_1\sqrt{n}$.

On trouvera de même $a = \frac{1}{c^2}.((c^2 + n_1)\sqrt{(c^2 + n)} - n_1\sqrt{n})$.

Cherchons maintenant la valeur de M.

On a $$Q^2 + R = (1 + nx^2)(1 + n_1x^2)^2;$$
donc en différentiant
$$2QdQ + dR = 2(1 + n_1x^2)\big((1 + nx^2)2n_1x + (1 + n_1x^2)nx\big).dx$$
d'où $$2Q.\frac{dQ}{dx} + \frac{dR}{dx} = 2(1 + n_1x^2)(2n_1 + n + 3nn_1x^2)..x.$$
En multipliant par Q et substituant pour Q^2 sa valeur $(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2-R$ on obtiendra
$$2(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2.\frac{dQ}{dx} - 2R.\frac{dQ}{dx} + Q\frac{dR}{dx} = 2Q(1+n_1x^2)(2n_1+n+3nn_1x^2).x.$$
Maintenant on a
$$M = \tfrac{1}{2}Q.\frac{dR}{dx} - R\frac{dQ}{dx};$$
donc
$$M = (1 + n_1x^2)\left((2n_1 + n + 3nn_1x^2)xQ - (1 + nx^2)(1 + n_1x^2).\frac{dQ}{dx}\right).$$
Or $Q = ax + bx^3$, donc $\frac{dQ}{dx} = a + 3bx^2$.

On tire de là
$$M = (1 + n_1x^2)\big[\big(2nn_1a - (n_1 + 2n)b\big).x^4 + (n_1a - 3b)x^2 - a\big].$$
Donc
$$\frac{M}{N} = \frac{[2nn_1a - (n_1 + 2n)b].x^4 + (n_1a - 3b).x^2 - a}{(1 + nx^2)(1 + n_1x^2)}$$
$$= A + \frac{L}{1+nx^2} + \frac{L'}{1+n_1x^2},$$
où l'on trouvera
$$A = 2a - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n}\right)b$$
$$L = \frac{2b}{n} - a = \frac{2n_1}{\sqrt{n}} - a$$
$$L' = \frac{b}{n_1} - 2a = \sqrt{n} - 2a.$$

On aura par conséquent
$$\text{arc tang}\left(\frac{\sqrt{R}}{Q}\right) = \left[2a - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n}\right)b\right].F + \left(\frac{2n_1}{\sqrt{n}} - a\right).\Pi(n) + (\sqrt{n} - 2a).\Pi(n_1);$$
donc
$$\Pi(n) = \frac{\sqrt{n}}{2n_1 - a\sqrt{n}}.\text{arc tg.}\left(\frac{\sqrt{R}}{Q}\right) - \frac{2a - \left(\frac{1}{n_1} + \frac{2}{n}\right).b}{\frac{2n_1}{\sqrt{n}} - a}.F + \frac{(2a - \sqrt{n})\sqrt{n}}{2n_1 - a\sqrt{n}}.\Pi(n_1).$$

On trouvera

$$\frac{2a-\left(\frac{1}{n_1}+\frac{2}{n}\right)b}{\frac{2n_1}{\sqrt{n}}-a}=\frac{2a\sqrt{n}-(2n_1+n)}{2n_1-a\sqrt{n}}=-\frac{[n+2\sqrt{(1+n)}\sqrt{(c^2+n)}]}{n_1+\sqrt{(1+n)}\sqrt{(c^2+n)}}.$$

Donc on aura

$$\Pi(n)=\frac{\sqrt{n}}{2n_1-a\sqrt{n}}.\operatorname{arc\,tg.}\left(\frac{\sqrt{R}}{ax+bx^3}\right)+\frac{2a\sqrt{n}-(2n_1+n)}{2n_1-a\sqrt{n}}.F+\frac{(2a-\sqrt{n})\sqrt{n}}{2n_1-a\sqrt{n}}.\Pi(n_1)+C$$

où
$$n_1=\pm(\sqrt{(n+1)}\pm\sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)}\pm\sqrt{n})=f(n)$$
$$b=\pm n_1\sqrt{n}=f(n).\sqrt{n}$$
$$a=(n_1+1)\sqrt{(n+1)}\mp n_1\sqrt{n}=\chi(n).$$

Ou bien en faisant pour abréger

$$\frac{\pm\sqrt{n}}{2n_1\mp a\sqrt{n}}=\alpha=\varphi(n)$$
$$\frac{\pm 2a\sqrt{n}-2n_1-n}{2n_1\mp a\sqrt{n}}=\beta=\theta(n)$$
$$\frac{\pm(2a\mp\sqrt{n})\sqrt{n}}{2n_1\mp a\sqrt{n}}=\gamma=\psi(n)\quad \text{et } C=-\frac{\alpha\pi}{2},$$

on obtiendra $\Pi(n)=\beta F+\gamma\Pi(n_1)-\alpha.\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{ax+bx^3}{\sqrt{R}}\right).$

Soit maintenant

$$n_2=f(n_1),\quad b_1=\sqrt{n_1}.f(n_1),\quad a_1=\chi(n_1)$$
$$\alpha_1=\varphi(n_1),\quad \beta_1=\theta(n_1),\quad \gamma_1=\psi(n_1);$$

on aura de la même manière

$$\Pi(n_1)=\beta_1 F+\gamma_1\Pi(n_2)-\alpha_1\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a_1x+b_1x^3}{\sqrt{R}}\right).$$

En dérivant les quantités n_3, α_2, β_2, γ_2, a_2, b_2 de la même manière, on aura

$$\Pi(n_2)=\beta_2 F+\gamma_2\Pi(n_3)-\alpha_2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{a_2x+b_2x^3}{\sqrt{R}}\right).$$

etc.

En faisant des substitutions successives on aura donc:

$$\Pi(n)=(\beta+\beta_1\gamma+\beta_2\gamma\gamma_1+\beta_3\gamma\gamma_1\gamma_2+\dots+\beta_{m-1}\gamma\gamma_1\gamma_2\dots\gamma_{m-2})F$$
$$+\gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3\dots\gamma_{m-1}.\Pi(n_m)-\alpha.\operatorname{arc\,tg.}\left(\frac{(a+bx^2)x}{\sqrt{R}}\right)$$
$$-\alpha_1\gamma.\operatorname{arc\,tg.}\left(\frac{(a_1+b_1x^2)x}{\sqrt{R}}\right)$$

$$- \alpha_2 \gamma\gamma_1 \operatorname{arctg.} \left(\frac{(a_2 + b_2 x^2)x}{\sqrt{R}}\right)$$

etc.

$$- \alpha_{m-1} \cdot \gamma\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \cdots \gamma_{m-2} \cdot \operatorname{arctg.} \left(\frac{(a_{m-1} + b_{m-1} x^2)x}{\sqrt{R}}\right).$$

Considérons maintenant la loi que suivent les quantités n, n_1. n_2 etc.
n_1 a les quatre valeurs suivantes:

1. $n_1 = \quad (\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} + \sqrt{n})$
2. $n_1 = \quad (\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} - \sqrt{n})$
3. $n_1 = -(\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} - \sqrt{n})$
4. $n_1 = -(\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} + \sqrt{n})$.

Soit d'abord $\quad n_1 = (\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} + \sqrt{n})$;
on voit aisément que $n_1 > 4n$, car comme $\sqrt{(n+1)} > \sqrt{n}$ et $\sqrt{(n+c^2)} > \sqrt{n}$
on a $\quad n_1 > (\sqrt{n} + \sqrt{n})(\sqrt{n} + \sqrt{n})$,
c'est-à-diré $\quad n_1 > 4n$,
de même $\quad n_2 > 4n_1 > 4^2 n$

$$n_3 > 4n_2 > 4^3 n$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$n_m > 4n_{m-1} > 4^m . n.$$

On peut donc faire en sorte que n_m devienne aussi grand qu'on le voudra. D'où il suit qu'on peut exprimer la fonetion $\Pi(n)$ par la fonction $\Pi(n_m)$ dans laquelle n_m est plus grand qu'un nombre donné quelconque.

Considérons maintenant les quantités a, b, α, β, etc.

On a $b = n_1\sqrt{n}$. b est donc positif et très grand, si n est grand. La valeur de a est

$$a = (n_1 + 1)\sqrt{(n+1)} - n_1\sqrt{n},$$

d'où l'on voit sans difficulté que a croît en même temps que n et que par suite les quantités a, a_1, a_2, etc. vont en croissant.

On a de même

$$\alpha_{m-1} = \frac{\sqrt{(n_{m-1})}}{2n_m - a_{m-1} \cdot \sqrt{(n_{m-1})}}.$$

En substituant les valeurs de n_m et de a_{m-1} en n_{m-1} on verra que α_{m-1} est une très petite quantité de l'ordre $\frac{1}{\sqrt{(n_{m-1})}}$.

On a

$$\beta_{m-1} = -\left(\frac{n_{m-1} + 2\sqrt{(1+n_{m-1})}.\sqrt{(c^2+n_{m-1})}}{n_m + \sqrt{(1+n_{m-1})}.\sqrt{(c^2+n_{m-1})}}\right),$$

d'où l'on voit sans peine que β est toujours contenu entre les limites -1 et $-\frac{3}{5}$, et que la série des valeurs de β tend continuellement vers la dernière limite, lorsque n est positif.

Enfin on a

$$\gamma = \frac{(2a-\sqrt{n})\sqrt{n}}{2n_1 - a\sqrt{n}} = \frac{[2\sqrt{(c^2+n)} + 2\sqrt{(1+n)} + \sqrt{n}]\sqrt{n}}{n_1 + \sqrt{(1+n)}.\sqrt{(c^2+n)}}.$$

En différentiant la valeur de γ par rapport à n on verra que $\frac{d\gamma}{dn}$ est toujours positif, lorsque n est positif. On conclut de là que la suite des valeurs de γ tend continuellement vers la limite 1 en croissant.

Considérons maintenant la seconde formule

$$n_1 = (\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} - \sqrt{n}).$$

Supposons d'abord que n soit très grand; alors on a

$$\sqrt{(n+1)} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}}, \quad \sqrt{(n+c^2)} = \sqrt{n} + \frac{c^2}{2\sqrt{n}};$$

donc

$$n_1 = \frac{c^2}{4n}.$$

Donc à mesure que n devient plus grand n_1 devient plus petit, si n est plus grand que l'unité. La même chose a lieu si n est moindre que l'unité, d'où l'on peut se convaincre aisément en différentiant la valeur de n_1, car on trouve

$$dn_1 = -n_1\left(\frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{(n+1)}} + \frac{1}{\sqrt{n}.\sqrt{(n^2+c)}}\right).\frac{dn}{2};$$

donc, la différentielle étant négative, il est clair que n_1 croît si n diminue, et réciproquement.

Cherchons maintenant si la série des quantités n, n_1, n_2, etc. a une limite. Si elle en a une, cette limite est la valeur que reçoit n en faisant $n_1 = n$. Soit k cette valeur, on aura

$$k = (\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k})(\sqrt{(k+c^2)} - \sqrt{k}).$$

Faisons $\quad n = k + \alpha$, on a

$$n_1 = k\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{(k^2+k)}} + \frac{1}{\sqrt{(k^2+c^2k)}}\right)\alpha\right] + \text{etc.}$$

donc $$n_1 = k - \tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k+1)}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k+c^2)}}\right).\alpha + \text{etc.}$$

maintenant $$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k+1)}} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{(k+c^2)}}\right) < 1;$$

donc $$n_1 - k < \alpha.$$

Donc n_1 diffère moins de k que n; donc k est la limite des quatités n, n_1, n_2, etc.

On peut donc réduire $\Pi(n)$ à la fonction $\Pi(n_m)$, où n_m diffère de k d'une quantité aussi petite qu'on le voudra. La fonction $\Pi(k)$ peut s'exprimer par la fonction F et des logarithmes, car on a:

$$(1-\gamma).\Pi(k) = \beta F - \alpha.\text{arc tang}\left(\frac{(a+bx^2)x}{\sqrt{R}}\right)$$

$$b = -n_1\sqrt{n} = -k^{\frac{3}{2}}, \quad a = (k+1)^{\frac{3}{2}} + k^{\frac{3}{2}},$$

$$\beta = -\left(\frac{2a+3\sqrt{k}}{a+2\sqrt{k}}\right), \quad \gamma = -\frac{2a+\sqrt{k}}{a+2\sqrt{k}},$$

$$1-\gamma = \frac{3(a+\sqrt{k})}{a+2\sqrt{k}}, \quad \alpha = -\frac{1}{a+2\sqrt{k}};$$

donc

$$\Pi(k) = -\frac{2a+3\sqrt{k}}{3(a+\sqrt{k})}.F + \frac{1}{3(a+\sqrt{k})}.\text{arc tang}\left(\frac{ax - k^{\frac{3}{2}}x^3}{\sqrt{R}}\right).$$

k est déterminé par l'équation

$$k = (\sqrt{(k+1)} - \sqrt{k})(\sqrt{(k+c^2)} - \sqrt{k}).$$

Considérons maintenant la troisième formule:

$$n_1 = -(\sqrt{(n+1)} + \sqrt{n})(\sqrt{(n+c^2)} - \sqrt{n})$$

n_1 est donc toujours négatif.

En différentiant on aura:

$$dn_1 = -\tfrac{1}{2}n_1\left(\frac{1}{\sqrt{(n^2+c^2n)}} - \frac{1}{\sqrt{(n^2+n)}}\right).dn$$

l'accroissement de n_1 est donc positif.

Soit d'abord n très grand; on a alors

$$n_1 = -2\sqrt{n}\left(\tfrac{1}{2}\frac{c^2}{\sqrt{n}}\right) = -c^2.$$

Donc lorsque n est très grand, n_1 est très peu différent de $-c^2$, qui est aussi la plus petite valeur que puisse recevoir n_1. La plus grande est $-c$, qu'on obtient en faisant $n=0$. Toutes les valeurs de n_1 sont donc renfermées entre $-c^2$ et $-c$.

On peut donc toujours supposer n négatif et compris entre ces deux limites très étroites.

La dernière formule est,

$$n_1 = -\left(\sqrt{(n+1)} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{(n+c^2)} + \sqrt{n}\right).$$

Si n est très grand on a

$$n_1 = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot 2\sqrt{n} = -1.$$

Donc lorsque n est très grand n_1 est très peu différent de -1. C'est la plus grande valeur que puisse avoir n_1. On obtient sa plus petite valeur en faisant $n = 0$, et on aura alors $n_1 = -c$. Donc n_1 est contenu entre -1 et $-c$.

Dans ce qui précède nous avons supposé n positif. Considérons maintenant le cas où n est négatif.

Soit $n = -\alpha$, α étant positif, et soit d'abord

$$n_1 = -\alpha_1 = \left(\sqrt{(-\alpha)} + \sqrt{(-\alpha+1)}\right)\left(\sqrt{(-\alpha)} + \sqrt{(-\alpha+c^2)}\right);$$

donc

$$\alpha_1 = \alpha\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}\right]\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{\alpha}\right)}\right].$$

On voit par là que $\alpha_1 > \alpha$, et si α est extrêmement grand, on a

$$\alpha_1 = 4\alpha.$$

Lorque

$$\alpha_1 = \alpha\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}\right]\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{\alpha}\right)}\right],$$

on a $\alpha_1 < \alpha$, et si α est très grand, α_1 est très petit.

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}\right]\left[1 + \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{\alpha}\right)}\right],$$

on a, si α est très grand,

$$\alpha_1 = \alpha\left(\frac{1}{2\alpha}\right) \cdot 2 = 1,$$

ou plus approché

$$\alpha_1 = \alpha\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{8\alpha^2}\right)\left(2 - \frac{c^2}{2\alpha}\right) = 1 - \left(\frac{c^2}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{\alpha};$$

donc la plus grande valeur de α_1 est $= 1$.

α_1 reçoit sa moindre valeur en faisant $\alpha = 1$; alors on a

$$\alpha_1 = 1 + \sqrt{(1 - c^2)}.$$

Lorsque

$$\alpha_1 = \alpha\left(1 + \sqrt{\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}\right]\left[1 - \sqrt{\left(1 - \frac{c^2}{\alpha}\right)}\right],$$

toutes les valeurs de α_1 sont renfermées entre les limites,

$$1 - \sqrt{(1-c^2)} \text{ et } c^2.$$

Cherchons maintenant la valeur de n en n_1.

En faisant le produit des quatre expressions suivantes:

$$n_1 - (\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})(\sqrt{n} + \sqrt{(n+c^2)})$$
$$n_1 - (\sqrt{n} - \sqrt{(n+1)})(\sqrt{n} - \sqrt{(n+c^2)})$$
$$n_1 - (\sqrt{n} - \sqrt{(n+1)})(\sqrt{n} + \sqrt{(n+c^2)})$$
$$n_1 - (\sqrt{n} + \sqrt{(n+1)})(\sqrt{n} - \sqrt{(n+c^2)}),$$

on aura,

$$n_1^4 - 4n.n_1^3 - (2c^2 + 4(1+c^2)n)n_1^2 - 4c^2n.n_1 + c^4 = 0;$$

d'ou l'on tire,

$$n = \frac{(n_1^2 - c^2)^2}{4n_1(n_1+1)(n_1+c^2)}.$$

Cette valeur est très remarquable parce qu'elle est rationnelle en n_1 et en c^2. Elle est aussi très commode pour le calcul logarithmique, car on a:

$$\log n = -\log 4 + 2\log(n_1 - c) + 2\log(n_1 + c) - \log n_1 - \log(n_1+1) - \log(n_1+c^2).$$

La formule trouvée dans ce qui précède, peut aussi servir à trouver une infinité de fonctions elliptiques de la troisième espèce qui sont indéfiniment réductibles à la première espèce. Il suffit de faire

$$n = n_m,$$

et on aura une intégrale $\Pi(n)$ déterminée par des logarithmes et par la fonction F.

Soit par exemple $n_1 = n$, on aura,

$$n = \frac{(n^2 - c^2)^2}{4n(n+1)(n+c^2)},$$

et de là

$$3n^4 + 4(1+c^2)n^3 + 6c^2n^2 - c^4 = 0.$$

d'où l'on tire quatre valeurs de n.

Lorsqu'on connaît une valeur de n de manière que $\Pi(n)$ puisse s'exprimer par la fonction elliptique de la première espèce, on en peut trouver une infinité d'autres qui jouissent de la même propriété; ce qui est bien évident, car connaissant $\Pi(n)$ on connaît aussi

$$\Pi(n_1), \quad \Pi(n_2), \quad \Pi(n_3), \text{ etc.}$$

et

$$\Pi(n_{-1}), \quad \Pi(n_{-2}), \quad \Pi(n_{-3}), \text{ etc.}$$

en continuant la suite $n, n_1, n_2 \ldots$ vers le côté opposé.

Ainsi on a par exemple

$$\Pi(c) = \tfrac{1}{2}F + \frac{\frac{1}{2}}{1+c} \text{ arc tang} \left(\frac{(1+c)x}{\sqrt{R}}\right)$$

donc on connaît aussi $\Pi(n_1)$

où 1. $n_1 = \quad (\sqrt{(c+1)} + \sqrt{c})(\sqrt{(c^2+c)} + \sqrt{c})$

2. $n_1 = \quad (\sqrt{(c+1)} - \sqrt{c})(\sqrt{(c^2+c)} - \sqrt{c})$

3. $n_1 = -(\sqrt{(c+1)} - \sqrt{c})(\sqrt{(c^2+c)} + \sqrt{c})$

4. $n_1 = -(\sqrt{(c+1)} + \sqrt{c})(\sqrt{(c^2+c)} - \sqrt{c})$.

De ces valeurs on déduit ensuite de nouvelles.

On connaît aussi

$$\Pi(-1 + \sqrt{(1-c^2)}, \text{ donc aussi } \Pi(n_1), \text{ où}$$

$$n_1 = \frac{[(-1+\sqrt{(1-c^2)})^2 - c^2]^2}{4[-1+\sqrt{(1-c^2)}].\sqrt{(1-c^2)}.[c^2-1+\sqrt{(1-c^2)}]} = -1;$$

mais cette valeur rend la formule illusoire à cause que $1 - x^2$ est facteur de R.

Méthode de trouver une infinité de formules de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce.

Pour trouver une formule de réduction pour les transcendantes elliptiques de la troisième espèce, il s'agit de trouver une relation entre deux de ces fonctions qui ne diffèrent que par rapport au paramètre. Cette relation doit être déduite en différentiant une fonction logarithmique de la forme,

$$A.\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right) + A'.\log\left(\frac{P'+Q'\sqrt{R}}{P'-Q'\sqrt{R}}\right) + \dots$$

expression qui peut aussi être mise sous cette forme,

$$A.\text{arc tang}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right) + A'.\text{arc tang}\left(\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}\right) + \dots$$

Suivant ce qu'on a vu dans le chapitre second, il est aisé de voir que la relation entre les deux fonctions doit avoir la forme:

$$L\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{R}} + L'\int\frac{dx}{(1+n_1x^2)\sqrt{R}} = C\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \Sigma A.\text{arc tang}\left(\frac{fx.\sqrt{R}}{\varphi x}\right).$$

En mettant $-x$ au lieu de x on aura

$$L\int\frac{dx}{(1+nx^2)\sqrt{R}} + L'\int\frac{dx}{(1+n_1x^2)\sqrt{R}} = C\int\frac{dx}{\sqrt{R}} - \Sigma A.\text{arc tang}\left(\frac{f(-x).\sqrt{R}}{\varphi(-x)}\right).$$

Il faut donc que $\frac{fx}{\varphi x}$ soit une fonction impaire ou de la forme $x.F(x^2)$.

Considérons seulement la fonction $A.\text{arc tang}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right) = S$.

En différentiant on aura:

$$dS = \frac{d\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right)}{1+\frac{Q^2R}{P^2}} = \frac{\frac{1}{2}PQ.\frac{dR}{dx}+R\left(P.\frac{dQ}{dx}-Q\frac{dP}{dx}\right)}{P^2+Q^2R}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}} = \frac{M}{N}\cdot\frac{dx}{\sqrt{R}}.$$

Comme $\frac{M}{N}$ doit avoir la forme $C+\frac{L}{1+nx^2}+\frac{L'}{1+n_1x^2}$, il faut que

$$P^2+Q^2R=(1+nx^2)^{\mu}.(1+n_1x^2)^{\mu'}=N,$$

μ et μ' étant des nombres entiers et positifs quelconques.

En différentiant on aura:

$$2PdP+2QRdQ+Q^2dR=dN,$$

et en multipliant par P et remettant la valeur de P^2,

$$2(N-Q^2R).dP+2PQRdQ+PQ^2dR=PdN.$$

C'est-à-dire:

$$M=\frac{\frac{1}{2}P\frac{dN}{dx}-N\frac{dP}{dx}}{Q};$$

en substituant la valeur de N on aura:

$$M=\frac{1}{Q}(1+nx^2)^{\mu-1}.(1+n_1x^2)^{\mu'-1}\left(P(\mu nx(1+n_1x^2)+\mu'n_1x(1+nx^2))-(1+nx^2)(1+n_1x^2).\frac{dP}{dx}\right);$$

donc

$$\frac{M}{N}=\frac{\frac{1}{Q}\cdot\left([(\mu n+\mu'n_1)x+(\mu+\mu')nn_1x^3].P-[1+(n+n_1)x^2+nn_1x^4].\frac{dP}{dx}\right)}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}.$$

Le numérateur de cette fraction doit être de la forme:

$$(k+k^1x^2+x^4).A.$$

Il y a deux cas à examiner selon que Q est une fonction paire ou impaire.

Si Q est une fonction paire P est une fonction impair. Dans ce cas, si $\mu+\mu'=2\nu$, la fonction Q est du degré $2\nu-2$ et P du degré $2\nu-1$; si au contraire $\mu+\mu'=2\nu+1$, la fonction Q est du degré $2\nu-2$, et P du degré $2\nu+1$.

Si Q est une fonction impaire, P est une fonction paire. Dans ce cas, si $\mu+\mu'=2\nu$, Q est du degré $2\nu-3$ et P du degré 2ν; si au contraire $\mu+\mu'=2\nu+1$, Q et du degré $2\nu-1$ et P du degré 2ν.

Déterminons maintenant les quantités k et k'.

On a en faisant $Q = fx$ et $P = \varphi x$,

$$M = \frac{1}{fx}\left[((\mu n + \mu' n_1)x + (\mu + \mu')nn_1 x^3)\varphi x - (1 + nx^2)(1 + n_1 x^2).\varphi' x\right]$$
$$= (k + k'x^2 + x^4).A.$$

Soit $x^2 = -\frac{1}{n}$ et $x^2 = -\frac{1}{n_1}$, on aura

$$\left(k - \frac{1}{n}.k' + \frac{1}{n^2}\right).A = -\mu\sqrt{(-n)}.\left(1 - \frac{n_1}{n}\right).\frac{\varphi\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]}{f\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]},$$

$$\left(k - \frac{1}{n_1}.k' + \frac{1}{n_1^2}\right).A = -\mu'\sqrt{(-n_1)}.\left(1 - \frac{n}{n_1}\right).\frac{\varphi\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n_1}\right)}\right]}{f\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n_1}\right)}\right]}.$$

Mais on a

$$(\varphi x)^2 + (fx)^2.(1 - x^2)(1 - c^2x^2) = (1 + nx^2)^{\mu}.(1 + n_1 x^2)^{\mu'};$$

donc en faisant $x^2 = -\frac{1}{n}$ et $x^2 = -\frac{1}{n_1}$,

$$\frac{\varphi\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]}{f\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n}\right)}\right]} = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right)\right]}.\sqrt{(-1)},$$

$$\frac{\varphi\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n_1}\right)}\right]}{f\left[\sqrt{\left(-\frac{1}{n_1}\right)}\right]} = \sqrt{\left[\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)\left(1 + \frac{c^2}{n_1}\right)\right]}.\sqrt{(-1)};$$

donc en substituant,

$$k - \frac{1}{n}.k' + \frac{1}{n^2} = \frac{\mu}{A}.\frac{n - n_1}{\sqrt{n}}.\sqrt{\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{c^2}{n}\right)\right]},$$
$$k - \frac{1}{n_1}.k' + \frac{1}{n_1^2} = \frac{\mu'}{A}.\frac{n_1 - n}{\sqrt{n_1}}.\sqrt{\left[\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)\left(1 + \frac{c^2}{n_1}\right)\right]},$$

ou bien

$$k - \frac{1}{n}.k' + \frac{1}{n^2} = \frac{\mu}{A}.\frac{n - n_1}{n\sqrt{n}}.\sqrt{((1 + n)(c^2 + n))},$$
$$k - \frac{1}{n_1}.k' + \frac{1}{n_1^2} = \frac{\mu'}{A}.\frac{n_1 - n}{n_1\sqrt{n_1}}.\sqrt{((1 + n_1)(c^2 + n_1))}.$$

On tire de là :

$$k = \frac{1}{nn_1} + \frac{1}{A}.\left(\frac{\mu\sqrt{[(1 + n)(c^2 + n)]}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu'\sqrt{[(1 + n_1)(c^2 + n_1)]}}{\sqrt{n_1}}\right),$$
$$k' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{1}{A}.\left(\frac{\mu n_1\sqrt{[(1 + n)(c^2 + n)]}}{\sqrt{n}} + \frac{\mu' n\sqrt{[(1 + n_1)(c^2 + n_1)]}}{\sqrt{n_1}}\right)$$

Soit pour abréger,

$$k = \frac{1}{nn_1} + \frac{l}{A},$$

$$k' = \frac{1}{n} + \frac{1}{n_1} + \frac{l'}{A},$$

on aura en substituant ces valeurs:

$$(k + k'x^2 + x^4)A = \left[\frac{1}{nn_1} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n_1}\right)x^2 + x^4\right].A + l + l'x^2;$$

c'est-à-dire:

$$(k + k'x^2 + x^4).A = \frac{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}{nn_1}.A + l + l'x^2.$$

Donc

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{nn_1} + \frac{l + l'x^2}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)}.$$

Soit

$$\frac{l + l'x^2}{(1+nx^2)(1+n_1x^2)} = \frac{L}{1+nx^2} + \frac{L'}{1+n_1x^2},$$

on aura

$$L = \frac{ln - l'}{n - n_1}, \quad L' = \frac{ln_1 - l'}{n_1 - n},$$

et en substituant les valeurs de l et de l',

$$L = \frac{\mu.\sqrt{[(1+n)(c^2+n)]}}{\sqrt{n}} \text{ et } L' = \frac{\mu'.\sqrt{[(1+n_1)(c^2+n_1)]}}{\sqrt{n_1}},$$

donc:

$$\frac{M}{N} = \frac{A}{nn_1} + \frac{\mu.\sqrt{[(1+n)(c^2+n)]}}{\sqrt{n}}.\frac{1}{1+nx^2} + \frac{\mu'.\sqrt{[(1+n_1)(c^2+n_1)]}}{\sqrt{n_1}}.\frac{1}{1+n_1x^2}.$$

En multipliant par $\frac{dx}{\sqrt{R}}$ et intégrant on aura:

$$\text{arc tang}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right) = \frac{A}{nn_1}.F + \frac{\mu.\sqrt{[(1+n)(c^2+n)]}}{\sqrt{n}}.\Pi(n) + \frac{\mu'.\sqrt{[(1+n_1)(c^2+n_1)]}}{\sqrt{n_1}}.\Pi(n_1);$$

ou bien en désignant $\frac{\sqrt{[(1+n)(c^2+n)]}}{\sqrt{n}}$ par $\psi(n)$,

$$\text{arc tang}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right) = \frac{A}{nn_1}.F + \mu\psi(n)\Pi(n) + \mu'\psi(n_1).\Pi(n_1).$$

On tire de là:

$$\Pi(n) = -\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\psi(n_1)}{\psi(n)}.\Pi(n_1) - \frac{A}{\mu nn_1\psi(n)}.F + \frac{1}{\mu\psi(n)}.\text{arc tang}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right),$$

qui est la formule de réduction demandée.

n_1 est une fonction de n; je la désigne par $\chi(n)$.

En mettant n_1 au lieu de n, il faut mettre $\chi(n_1)=n_2$ à la place de n_1, on a donc,

$$\Pi(n_1)=-\frac{\mu'}{\mu}\cdot\frac{\psi(n_2)}{\psi(n_1)}\cdot\Pi(n_2)-\frac{A'}{\mu n_1 n_2 \psi(n_1)}\cdot F+\frac{1}{\mu\psi(n_1)}\cdot\text{arc tang}\left(\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}\right).$$

En substituant cette valeur il vient:

$$\Pi(n)=\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\cdot\frac{\psi(n_2)}{\psi(n)}\cdot\Pi(n_2)-\frac{1}{\mu\psi(n)}\left\{\frac{A}{nn_1}-\frac{A'\frac{\mu'}{\mu}}{n_1n_2}\right\}F$$
$$+\frac{1}{\mu\psi(n)}\left[\text{arc tang}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right)-\frac{\mu'}{\mu}\,\text{arc tang}\left(\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}\right)\right].$$

En général on aura:

$$\Pi(n)=\pm\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^m\cdot\frac{\psi(n_m)}{\psi(n)}\cdot\Pi(n_m)-\frac{1}{\mu\psi(n)}\left\{\frac{A}{nn_1}-\frac{A'\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)}{n_1n_2}+\frac{A''\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2}{n_2n_3}-\frac{A'''\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^3}{n_3n_4}\cdots\pm\frac{A^{(m-1)}\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{m-1}}{n_{m-1}n_m}\right\}\cdot F$$
$$+\frac{1}{\mu\psi(n)}\cdot\left[\text{arc tg.}\left(\frac{Q\sqrt{R}}{P}\right)-\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)\cdot\text{arc tg.}\left(\frac{Q'\sqrt{R}}{P'}\right)+\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^2\text{arc tg.}\left(\frac{Q''\sqrt{R}}{P''}\right)\cdots\pm\left(\frac{\mu'}{\mu}\right)^{m-1}\cdot\text{arc tg.}\left(\frac{Q^{(m-1)}\sqrt{R}}{P^{(m-1)}}\right)\right].$$

Soit par exemple $P=1+bx^2$, $Q=ex$, on aura:

$$(1+bx^2)^2+e^2x^2(1-x^2)(1-c^2x^2)=(1+nx^2)(1+n_1x^2)^2,$$

d'où l'on tire:

$$1+b=(1+n_1)\sqrt{(1+n)},$$
$$c^2+b=(c^2+n_1)\sqrt{\left(1+\frac{n}{c^2}\right)},$$

donc

$$1-c^2=\sqrt{(1+n)}-c\sqrt{(c^2+n)}+n_1\left[\sqrt{(1+n)}-\sqrt{\left(1+\frac{n}{c^2}\right)}\right],$$

ce qui donne.

$$n_1=\frac{1-c^2-\sqrt{(1+n)}+c\sqrt{(c^2+n)}}{\sqrt{(1+n)}-\sqrt{\left(1+\frac{1}{c^2}\right)}},$$

ou en réduisant,

$$n_1=\frac{c[c-\sqrt{(c^2+n)}]\,[1-\sqrt{(1+n)}]}{n}.$$

XV.

Sur la résolution algébrique des équations.

Un des problèmes les plus intéressants de l'algèbre et celui de la résolution algébrique des équations. Aussi on trouve que presque tous les géomètres d'un rang distingué ont traité ce sujet. On parvint sans difficulté à l'expression générale des racines des équations des quatre premiers degrés. On découvrit une méthode uniforme pour résoudre ces équations et qu'on croyait pouvoir appliquer à une équation d'un degré quelconque; mais malgré tous les efforts de *Lagrange* et d'autres géomètres distingués on ne put parvenir au but proposé. Cela fit présumer que la résolution des équations générales était impossible algébriquement; mais c'est sur quoi on ne pouvait pas décider, attendu que la méthode adoptée n'aurait pu conduire à des conclusions certaines que dans le cas où les équations étaient résolubles. En effet, on se proposait de résoudre les équations, sans savoir si cela était possible. Dans ce cas, on pourrait bien parvenir à la résolution, quoique cela ne fût nullement certain; mais si par malheur la résolution était impossible, on aurait pu la chercher une éternité, sans la trouver. Pour parvenir infailliblement à quelque chose dans cette matière, il faut donc prendre une autre route. On doit donner au problème une telle forme qu'il soit toujours possible de le résoudre, ce qu'on peut toujours faire d'un problème quelconque. Au lieu de demander une relation dont on ne sait pas si elle existe ou non, il faut demander si une telle relation est en effet possible. Par exemple, dans le calcul intégral au lieu de chercher, à l'aide d'une espèce de tâtonnement et de divination, d'intégrer les formules différentielles, il faut plutôt chercher, s'il est possible de les intégrer de telle ou telle manière. En présentant un problème de cette manière l'énoncé même contient le germe de la solution, et montre la route qu'il faut prendre; et je crois qu'il

y aura peu de cas où l'on ne parviendrait à des propositions plus ou moins importantes, dans le cas même où l'on ne saurait répondre complètement à la question à cause de la complication des calculs. Ce qui a fait que cette méthode, qui sans contredit est la seule scientifique parce qu'elle est la seule dont on sait d'avance qu'elle peut conduire au but proposé, a été peu usitée dans les mathématiques, c'est *l'extrême complication* à laquelle elle paraît être assujettie dans la plupart des problèmes, surtout lorsqu'ils ont une certaine généralité; mais dans bien des cas cette complication n'est qu'apparente et s'évanouira dès le premier abord. J'ai traité plusieurs branches de l'analyse de cette manière, et quoique je me sois souvent proposé des problèmes qui ont surpassé mes forces, je suis néanmoins parvenu à un grand nombre de résultats généraux qui jettent un grand jour sur la nature des quantités dont la connaissance est l'objet des mathématiques. C'est surtout dans le calcul intégral où cette méthode est facile à appliquer. Je donnerai dans une autre occasion les résultats auxquels je suis parvenu dans ces recherches, et le procédé qui m'y a conduit Dans ce mémoire je vais traiter le problème de la résolution algébrique des équations, dans toute sa généralité. Le premier, et, si je ne me trompe, le seul qui avant moi ait cherché à démontrer l'impossibilité de la résolution algébrique des équations générales, est le géomètre *Ruffini*; mais son mémoire est tellement compliqué qu'il est très difficile de juger de la justesse de son raisonnement. Il me paraît que son raisonnement n'est pas toujours satisfaisant. Je crois que la démonstration que j'ai donnée de ce théorème, ne laisse rien à désirer du côté de la rigueur; mais elle n'a pas toute la simplicité dont elle est susceptible. Je suis parvenu à une autre démonstration, fondée sur les mêmes principes, qui est plus simple en cherchant à résoudre un problème plus général.

On sait que toute expression algébrique peut satisfaire à une équation d'un degré plus ou moins élevé, selon la nature particulière de cette expression. Il y a de cette manière une infinité d'équations particulières qui sont résolubles algébriquement. De là dérivent naturellement les deux problèmes suivants, dont la solution complète comprend toute la théorie de la résolution algébrique des équations, savoir:

1. Trouver toutes les équations d'un degré déterminé quelconque qui soient résolubles algébriquement.
2. Juger si une équation donnée est résoluble algébriquement, ou non.

C'est la considération de ces deux problèmes qui est l'objet de ce mémoire, et quoique nous n'en donnions pas la solution complète, nous indiquerons néanmoins des moyens sûrs pour y parvenir. On voit que ces deux problèmes sont intimement liés entre eux, en sorte que la solution du premier doit conduire à celle du second. Dans le fond, ces deux théorèmes sont les mêmes. Dans le cours des recherches on parviendra à plusieurs propositions générales sur les équations par rapport à leur résolubilité et à la forme des racines. Ce sont ces propriétés générales en quoi consiste véritablement la théorie des équations quant à leur résolution algébrique, car il importe peu si l'on sait qu'une équation d'une forme particulière est résoluble ou non. Une de ces propriétés générales est par exemple qu'il est impossible de résoudre algébriquement les équations générales passées le quatrième degré.

Pour plus de clarté nous allons d'abord analyser en peu de mots le problème proposé.

D'abord qu'est ce que cela veut dire que de *satisfaire algébriquement à une équation algébrique?* Avant tout il faut fixer la notion de cette expression. Lorsqu'il s'agit d'une équation générale, dont tous les coefficiens peuvent par conséquent être regardés comme des variables indépendantes, la résolution d'une telle équation doit consister à exprimer les racines en fonctions algébriques des coefficiens. Ces fonctions pourront, selon la conception vulgaire de ce mot, contenir des quantités constantes quelconques, algébriques, ou non. On pourra y ajouter, si l'on veut, comme condition particulière, que ces constantes seront de même des quantités algébriques; ce qui modifierait un peu le problème En général, il y a deux cas différents selon que les coefficiens contiendront des quantités variables, ou non. Dans le premier cas, les coefficiens seront *des fonctions rationnelles* d'un certain nombre de quantités x, z, z', z'', etc. qui contiendront au moins une variable indépendante x. Nous supposons que les autres sont des fonctions quelconques de celle-là. Dans ce cas, nous dirons qu'on peut *satisfaire algébriquement* à l'équation proposée, si l'on peut y satisfaire en mettant au lieu de l'inconnu une fonction algébrique de x, z, z', z'', etc. Nous dirons de même que l'équation est *résoluble algébriquement,* si l'on peut exprimer toutes les racines de cette manière. L'expression d'une racine pourra, dans ce cas de coefficiens variables, contenir des quantités constantes quelconques algébriques, ou non.

Dans le second cas, où l'on regarde les coefficiens comme des quantités constantes, on peut concevoir que ces coefficiens sont formés d'autres quantités constantes à l'aide d'opérations rationnelles. Désignons ces dernières quantités par α, β, γ, ..., nous dirons qu'on peut satisfaire algébriquement à l'équation proposée, s'il est possible d'exprimer une ou plusieurs racines en α, β, γ, ... à l'aide d'opérations algébriques. Si l'on peut exprimer toutes les racines de cette manière, nous dirons que l'équation est résoluble algébriquement; α, β, γ, ... pourront d'ailleurs être quelconques, algébriques ou non. Dans le cas particulier où tous les coefficiens sont rationnels, on peut donc satisfaire algébriquement à l'équation, si une ou plusieurs de ses racines sont des quantités algébriques.

Nous avons distingué deux espèces d'équations, celles qui sont résolubles algébriquement, et celles auxquelles on peut satisfaire algébriquement. En effet, on sait qu'il y a des équations dont une ou plusieurs racines sont algébriques, sans qu'on puisse affirmer la même chose sur toutes les racines.

Cela posé, la marche naturelle pour résoudre notre problème se prête d'elle même d'après l'énoncé, savoir il faut substituer dans l'équation proposée, à la place de l'inconnu, l'expression algébrique la plus générale, et ensuite chercher s'il est possible de lui satisfaire de cette manière. Pour cela il faut avoir l'expression générale d'une quantité algébrique et d'une fonction algébrique. On aura donc d'abord le problème suivant:

"Trouver la forme la plus générale d'une expression algébrique."

Après avoir trouvé cette forme, on aura l'expression d'une racine algébrique d'une équation algébrique quelconque.

La première condition à laquelle cette expression algébrique doit être assujettie, est qu'elle doit satisfaire à une équation algébrique. Or, comme on sait, elle peut le faire dans toute sa généralité. Cette première condition est donc remplie d'elle-même. Pour savoir maintenant si elle peut être particularisée de sorte qu'elle satisfasse à l'équation proposée, il faut chercher toutes les équations auxquelles elle puisse satisfaire, et ensuite comparer ces équations à la proposée. On aura donc ce problème:

"Trouver toutes les équations possibles auxquelles une fonction algébrique puisse satisfaire."

Il est clair qu'une même fonction algébrique peut satisfaire à une infinité d'équations différentes. Donc lorsque l'équation proposée peut être satisfaite

algébriquement, il y aura deux cas; ou cette équation sera la moins élevée à laquelle elle puisse satisfaire, ou il doit exister une autre de la même forme à laquelle elle puisse satisfaire, qui est d'un degré moins élevé, et qui est la plus simple. Dans le premier cas, nous dirons que l'équation est *irréductible,* et dans l'autre, qu'elle est *réductible.* Le problème proposé se décompose ainsi en ces deux autres:

1. "Juger si une équation proposée est réductible, ou non."
2. "Juger si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, ou non."

Considérons d'abord le second problème. L'équation proposée étant irréductible, elle est par là, la plus simple équation à laquelle l'expression algébrique cherchée pourra satisfaire. Donc pour s'assurer si elle peut être satisfaite ou non, il faut chercher l'équation la moins élevée à laquelle une expression algébrique puisse satisfaire, et ensuite comparer cette équation à l'équation proposée. De là naît le problème:

"Trouver l'équation la moins élevée à laquelle une fonction algébrique puisse satisfaire."

La solution de ce problème sera l'objet d'un second paragraphe. On aura ainsi toutes les équations irréductibles qui pourront être satisfaites algébriquement. L'analyse conduit aux théorèmes suivants:

1. "Si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, elle est en même temps résoluble algébriquement, et toutes les racines pourront être représentées par la même expression en donnant à des radicaux qui s'y trouvent, toutes leurs valeurs."
2. "Si une expression algébrique satisfait à une équation quelconque, on pourra toujours lui donner une telle forme qu'elle y satisfasse encore, en attribuant à tous les différents radicaux dont elle se compose, toutes les valeurs dont ils sont susceptibles."
3. "Le degré d'une équation irréductible, résoluble algébriquement, est nécessairement le produit d'un certain nombre d'exposans de radicaux qui se trouvent dans l'expression des racines.

Ayant ainsi montré comment on peut parvenir à l'équation la moins élevée à laquelle pourra satisfaire une expression algébrique quelconque, la marche la plus naturelle serait de former cette équation, et de la comparer à l'équation proposée, mais on tombe ici dans des difficultés qui paraissent insurmontables.

Car quoiqu'on ait assigné une règle générale pour former dans chaque cas particulier l'equation la plus simple, on est loin d'avoir par là l'équation même. Et quand même on parviendrait à trouver cette équation, comment juger si des coefficiens d'une telle complication pouvaient en effet être égaux à ceux de l'équation proposée. Mais je suis parvenu au but proposé en suivant une autre route, savoir en généralisant le problème.

D'abord l'équation étant donnée, son degré le sera de même. Il se présente donc maintenant d'abord ce problème:

"Trouver l'expression algébrique la plus générale qui puisse satisfaire à une équation d'un degré donné."

On est conduit naturellement à considérer deux cas, selon que le degré de l'équation est un nombre premier ou non.

Quoique nous n'ayons pas donné la solution complète de ce problème, néanmoins la marche naturelle de la solution a conduit à plusieurs propositions générales, très remarquables en elles-mêmes, et qui ont conduit à la solution du problème dont nous nous occupons. Les plus importantes de ces propositions sont les suivantes:

1. "Si une équation irréductible d'un degré premier μ est résoluble algébriquement, les racines auront la forme suivante:

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \ldots + \sqrt[\mu]{R_{\mu-1}},$$

où A est une quantité rationnelle, et $R_1, R_2, \ldots R_{\mu-1}$ les racines d'une équation du degré $\mu - 1$."

2. "Si une équation irréductible, dont le degré est une puissance d'un nombre premier μ^α, est résoluble algébriquement, il doit arriver l'un de deux, ou l'équation est décomposable en $\mu^{\alpha-\beta}$ équations, chacune du degré μ^β, et dont les coefficiens dépendront des équations du degré $\mu^{\alpha-\beta}$; ou bien on pourra exprimer une quelconque des racines par la formule

$$y = A + \sqrt[\mu]{R_1} + \sqrt[\mu]{R_2} + \ldots + \sqrt[\mu]{R_\nu},$$

où A est une quantité rationnelle, et $R_1, R_2, \ldots R_\nu$ des racines d'une même équation du degré ν, le dernier nombre étant tout au plus égal à $\mu^\alpha - 1$."

3. "Si une équation irréductible d'un degré μ, divisible par des nombres premiers différents entre eux, est résoluble algébriquement, on peut toujours décomposer μ en deux facteurs μ_1 et μ_2, de sorte que l'équation

proposée soit décomposable en μ_1 équations, chacune du degré μ_2, et dont les coefficiens dépendent d'équations du degré μ_1."

4. "Si une équation irréductible du degré μ^α, où μ est premier, est résoluble algébriquement, on pourra toujours exprimer une quelconque des racines par la formule:

$$y = f\left(\sqrt[\mu]{R_1}, \sqrt[\mu]{R_2}, \ldots \sqrt[\mu]{R_\alpha}\right),$$

où f désigne une fonction rationnelle et symétrique des radicaux entre les parenthèses, et R_1, R_2, ... R_α des racines d'une même équation dont le degré est tout au plus égal à $\mu^\alpha - 1$."

Ces théorèmes sont les plus remarquables auxquels je suis parvenu, mais outre cela on trouvera dans le cours du mémoire une foule d'autres propriétés générales des racines, propriétés qu'il sera trop long de rapporter ici. Je dirai seulement un mot sur la nature des radicaux qui pourront se trouver dans l'expression des racines. D'abord le troisième théorème fait voir que, si le degré d'une équation irréductible est représenté par

$$\mu_1^{\alpha_1} \cdot \mu_2^{\alpha_2} \cdot \mu_3^{\alpha_3} \ldots \mu_\omega^{\alpha_\omega},$$

il ne pourra dans l'expression des racines se trouver d'autres radicaux que ceux qui pourront se trouver dans l'expression des racines d'équations des degrés $\mu_1^{\alpha_1}$, $\mu_2^{\alpha_2}$, $\mu_3^{\alpha_3}$, ... $\mu_\omega^{\alpha_\omega}$.

A l'aide des théorèmes généraux auxquels on est ainsi parvenu, on en a ensuite déduit une règle générale pour reconnaître si une équation proposée est résoluble, ou non. En effet, on est conduit à ce résultat remarquable que, si une équation irréductible est résoluble algébriquement, on pourra dans tous les cas trouver les racines à l'aide de la méthode de *Lagrange* proposée pour la résolution des équations; savoir, en suivant la marche de *Lagrange* on doit parvenir à des équations qui aient au moins une racine qui puisse s'exprimer rationnellement en les coefficiens. Il y a plus, *Lagrange* a fait voir qu'on peut ramener la résolution d'une équation du degré   à celle de   équations respectivement des degrés   à l'aide d'une équation du degré   . Nous démontrerons que c'est cette équation qui doit nécessairement avoir au moins une racine exprimable rationnellement en ses coefficiens pour que l'équation proposée soit résoluble algébriquement.

Donc, si cette condition n'est pas remplie, c'est une preuve incontestable que l'équation n'est pas résoluble; mais il est à remarquer qu'elle peut être

remplie sans que l'équation soit en effet résoluble algébriquement. Pour le reconnaître, il faut encore soumettre les équations auxiliaires au même examen. Cependant dans le cas où le degré de la proposée est un nombre premier, la première condition suffira toujours, comme nous le montrerons. De ce qui précède, il a été facile ensuite de tirer comme corollaire qu'il est impossible de résoudre les équations générales.

§. 1.

Détermination de la forme générale d'une expression algébrique.

Comme nous l'avons remarqué plus haut, il faut avant tout connaître la forme générale d'une expression algébrique. Cette forme doit se déduire d'une définition générale que voici.

"Une quantité y est dite pouvoir s'exprimer algébriquement en plusieurs autres quantités, lorsqu'on peut la former de ces dernières à l'aide d'un nombre limité des opérations suivantes:

1. Addition. 2. Soustraction. 3. Multiplication. 4 Division.
5. Extraction des racines avec des exposans premiers."

Nous n'avons pas parmi ces opérations compté l'élévations à des puissances entières et l'extraction des racines avec des exposans composés, parce qu'elles ne sont pas nécessaires, la première étant contenue sous la multiplication, et le seconde sous l'extraction des racines avec des exposans premiers.

Si les trois premières opérations ci-dessus sont seules nécessaires pour former la quantité y, elle est dite *rationnelle* et *entière* en les quantités connues, et si les quatre premières opérations sont seules nécessaires, elle est dite *rationnelle*. D'après la nature des quantités connues nous ferons les distinctions suivantes:

1. Une quantité qui peut s'exprimer algébriquement en l'unite s'appelle un nombre algébrique; si elle peut s'exprimer rationnellement en l'unité, elle s'appelle un nombre rationnel, et si elle peut être formée de l'unité à l'aide de l'addition, soustraction et multiplication, elle s'appelle un nombre entier.
2. Si les quantités connues contiennent une ou plusieurs quantités variables, la quantité y est dite *fonction algébrique, rationnelle* ou *entière* de ces quantités selon la nature des opérations nécessaires pour la former. Dans ce cas on regarde comme quantité connue toute quantité constante.

A l'aide de ces définitions on établira sans peine les propositions suivantes, connues depuis long temps:

1 Une quantité y exprimable entièrement en les quantités $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_n$, peut être formée par l'addition d'un nombre limité de termes de la forme

$$A.\alpha_1^{m_1}.\alpha_2^{m_2}\ldots\alpha_n^{m_n},$$

A étant un nombre entier et $m_1, m_2, \ldots m_n$ des nombre entiers en y comprenant zéro.

2. Une quantité y exprimable rationnellement en $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_n$ pourra toujours se mettre sous la forme

$$y = \frac{y_1}{y_2},$$

où y_1 et y_2 sont exprimés entièrement en les mêmes quantités.

3. Un nombre rationnel pourra toujours être réduite à la forme

$$\frac{y_1}{y_2}$$

où y_1 et y_2 sont des nombres entiers positifs, premiers entre eux.

4. Une fonction entière y de plusieurs quantités variables $x_1, x_2, \ldots x_n$ pourra toujours être formée par l'addition d'un nombre limité de termes de la forme

$$A.x_1^{m_1}.x_2^{m_2}\ldots x_n^{m_n},$$

où A est une quantité constante et $m_1, m_2, \ldots m_n$ des nombres entiers en y comprenant zéro.

5. Une fonction rationnelle y de plusieurs quantités $x_1, x_2 \ldots x_n$ pourra toujours se réduire à la forme

$$\frac{y_1}{y_2},$$

où y_1 et y_2 sont des fonctions entières qui n'ont point de facteur commun.

Cela posé, il nous reste à déterminer la forme des expressions algébriques en général.

Quelle que soit la forme d'une expression algébrique, elle doit d'abord contenir un nombre limité de radicaux. Désignons tous les radicaux différents par.

$$\sqrt[\mu_1]{R_1},\ \sqrt[\mu_2]{R_2},\ \sqrt[\mu_3]{R_3}, \ldots \sqrt[\mu_n]{R_n},$$

et il est clair que la quantité proposée pourra s'exprimer rationnellement en ces radicaux et en les quantités connues. Désignons cette quantité par

$$y = f\left(\sqrt[\mu_1]{R_1},\ \sqrt[\mu_2]{R_2}, \ldots \sqrt[\mu_n]{R_n}\right).$$

Les radicaux qui composent une expression algébrique peuvent être de deux espèces: ou ils sont nécessaires pour former l'expression, ou non. S'ils ne sont pas nécessaires, on peut les chasser, et alors l'expression proposée contiendra un nombre moindre de radicaux. De là il suit qu'on peut toujours supposer que les radicaux soient tels qu'il soit impossible d'exprimer l'expression algébrique par une partie des radicaux qui s'y trouvent.

Cela posé, comme le nombre des radicaux est limité, il s'ensuit que parmi les radicaux, il se doit trouver au moins un qui ne soit pas contenu sous un autre radical. Supposons que $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ soit un tel radical, la quantité R_1 pourra toujours s'exprimer rationnellement en les autres radicaux et les quantités connues.

Maintenant y est une fonction rationnelle des radicaux et des quantités connues; donc on peut faire

$$y = \frac{y_1}{y_2},$$

où y_1 et y_2 sont des expressions entières des radicaux et des quantités connues. Donc on pourra d'abord faire

$$y = \frac{y_1}{y_2} = \frac{P_0 + P_1 . \sqrt[\mu_1]{R_1} + P_2\left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^2 + \ldots + P_\nu \left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^\nu}{Q_0 + Q_1 \sqrt[\mu_1]{R_1} + Q_2\left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^2 + \ldots + Q_{\nu'} \left(\sqrt[\mu_1]{R_1}\right)^{\nu'}},$$

où P_0, P_1, ... Q_0, Q_1, ... sont des expressions rationnelles des quantités connues et des autres radicaux. Or on peut encore simplifier beaucoup cette expression. D'abord désignons par

$$y'_2,\ y''_2,\ \ldots\ y_2^{(\mu_1-1)}$$

les valeurs que prendra y_2 en mettant au lieu de $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ les valeurs $\omega\sqrt[\mu_1]{R_1}$, $\omega^2\sqrt[\mu_1]{R_1}$ ... $\omega^{\mu_1-1}.\sqrt[\mu_1]{R_1}$, ω étant une racine imaginaire de l'équation $\omega^{\mu_1} - 1 = 0$; on sait que le radical $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ et la quantité ω disparaîtront de l'expression du produit

$$y_2 y'_2 y''_2 \ldots y_2^{(\mu_1-1)},$$

et que l'expression $y_1 . y'_2 . y''_2 \ldots y_2^{(\mu_1-1)}$ sera rationnelle en $\sqrt[\mu_1]{R_1}$ sans ω.

On aura donc

$$y = \frac{y_1 . y'_2 . y''_2 \ldots y_2^{(\mu_1-1)}}{y_2 . y'_2 . y''_2 \ldots y_2^{(\mu_1-1)}} = \frac{z}{z_1},$$

où z_1 est entier en les quantités connues et en les radicaux $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $R_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, ..., et z entier en les quantités connues et les radicaux $R_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $R_3^{\frac{1}{\mu_3}}$ ...

En faisant donc

$$z = P_0 + P_1 . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + P_2 . R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \ldots + P_\nu . R_1^{\frac{\nu}{\mu_1}},$$

on aura

$$y = \frac{P_0}{z_1} + \frac{P_1}{z_1} . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + \ldots + \frac{P_\nu}{z_1} . R_1^{\frac{\nu}{\mu_1}}.$$

Or on a

$$R_1^{\frac{\mu_1}{\mu_1}} = R_1, \quad R_1^{\frac{\mu_1+1}{\mu_1}} = R_1 . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} \text{ etc.}$$

donc on pourra enfin supposer

$$y = P_0 + P_1 . R_1^{\frac{1}{\mu_1}} + P_2 . R_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \ldots + P_{\mu_1-1} . R_1^{\frac{\mu_1-1}{\mu_1}},$$

où P_0, P_1, ... P_{μ_1-1} et R_1 pourront s'exprimer *rationnellement* en les quantités connues et les radicaux $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $R_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, etc.

Maintenant les quantités P_0, P_1, ... R_1 étant des expressions algébriques, mais contenant un radical de moins, on pourra les mettre sous une forme semblable à celle de y. Et si l'on désigne par $R_2^{\frac{1}{\mu_2}}$ un radical qui se trouve contenu sous un des autres radicaux, les expressions dont il s'agit pourront se mettre sous la forme

$$P'_0 + P'_1 . R_2^{\frac{1}{\mu_2}} + P'_2 . R_2^{\frac{2}{\mu_2}} + \ldots + P'_{\mu_2-1} . R_2^{\frac{\mu_2-1}{\mu_2}},$$

où R_2, P'_0, P'_1, ... P'_{μ_2-1} pourront s'exprimer rationnellement en les quantités connues et les radicaux $R_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, $R_4^{\frac{1}{\mu_4}}$, etc.

En continuant ainsi, on doit parvenir enfin à des expressions qui ne contiendront aucun radical, et qui par conséquent seront rationnelles en les quantités connues.

Dans ce qui précède nous avons besoin de distinguer les expressions algébriques selon le nombre des radicaux qu'elles contiennent. Nous nous servirons de l'expression suivante. Une expression algébrique qui, outre les quantités connues, ne contient qu'un nombre de n radicaux sera appelée *expres-*

sion algébrique de l'ordre n. Ainsi par exemple en supposant connues les quantités $\sqrt{2}$ et $\sqrt{\pi}$, la quantité

$$\sqrt{2}+\sqrt{(3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi})}+\sqrt[3]{[5+\sqrt{\pi}+\sqrt{(3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi})}]}$$

sera une expression algébrique du second ordre, car outre les quantités $\sqrt{2}$, $\sqrt{\pi}$ elle ne contient que les deux radicaux

$$\sqrt{(3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi})},\quad \sqrt[3]{(5+\sqrt{\pi}+\sqrt{(3-\sqrt{2}+\sqrt{\pi})})}.$$

§. 2.

Détermination de l'équation la moins élevée à laquelle peut satisfaire une expression algébrique donnée.

Pour simplifier les expressions, nous nous servirons des notations suivantes:

1. Nous désignerons par A_m, B_m, C_m, ... des expressions algébriques de l'ordre m.

2. Si dans $A_m = p_0 + p_1.\sqrt[\mu]{R} + \ldots + p_{\mu-1}.\left(\sqrt[\mu]{R}\right)^{\mu-1}$ on substitue à la place de $\sqrt[\mu]{R}$ successivement $\omega.\sqrt[\mu]{R}$, $\omega^2.\sqrt[\mu]{R}$, ... $\omega^{\mu-1}.\sqrt[\mu]{R}$, où ω est une racine imaginaire de l'équation $\omega^\mu - 1 = 0$, nous désignerons le produit de toutes les quantités ainsi formées par ΠA_m.

3. Si tous les coefficiens d'une équation
$$y^n + A_m.y^{n-1} + A'_m.y^{n-2} + \ldots = 0,$$
sont des expressions algébriques de l'ordre m, nous dirons que cette équation est de l'ordre m. Nous désignerons son premier membre par $\varphi(y,m)$, et le degré de cette équation par $\delta\varphi(y,m)$.

Cela posé, nous allons successivement établir les théorèmes suivants:

Théorème I. Une équation telle que

$$t_0 + t_1.y_1^{\frac{1}{\mu_1}} + t_2 y_1^{\frac{2}{\mu_1}} + \ldots + t_{\mu_1-1}.y_1^{\frac{\mu_1-1}{\mu_1}} = 0, \ldots\ldots\ldots (\alpha)$$

où t_0, t_1, ... t_{μ_1-1} sont exprimés rationnellement en ω, ω étant une racine imaginaire de l'équation $\omega^{\mu_1} - 1 = 0$, les quantités connues et les radicaux $y_2^{\frac{1}{\mu_2}}$, $y_3^{\frac{1}{\mu_3}}$, ..., donnera séparément:

$$t_0 = 0,\ t_1 = 0,\ t_2 = 0, \ldots t_{\mu_1-1} = 0. \ldots\ldots\ldots\ldots (\beta)$$

Démonstration. Soit $y_1^{\frac{1}{\mu_1}} = z$, on aura les deux équations

$$z^{\mu_1} = y_1 = 0, \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\gamma)$$

$$t_0 + t_1 z + \ldots + t_{\mu_1 - 1} . z^{\mu_1 - 1} = 0. \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (\delta)$$

Si donc les coefficiens t_0, t_1, etc. ne sont pas égaux à zéro, z sera une racine de l'équation (δ). Supposons que l'équation:

$$0 = s_0 + s_1 z + \ldots + s_{k-1} . z^{k-1} + z^k$$

soit une équation irréductible à laquelle puisse satisfaire z, s_0, s_1, etc. étant des quantités de la même nature que t_0, $t_1, \ldots t_{\mu_1 - 1}$, et k un nombre qui est nécessairement moindre que μ_1. Toutes les racines de cette équation doivent se trouver parmi celles de l'équation

$$z^{\mu_1} - y_1 = 0.$$

Or si z est une racine, une autre quelconque pourra être représentée par $\omega^\nu . z$: donc, si k est plus grand que l'unité, l'équation doit être encore satisfaite en mettant $\omega^\nu . z$ au lieu de z. Cela donne:

$$0 = s_0 + s_1 \omega^\nu . z + \ldots s_{k-1} . \omega^{(k-1)\nu} . z^{k-1} + \omega^{k\nu} . z^k,$$

d'où l'on tire en la combinant avec la précédente

$$0 = s_1 (\omega^\nu - 1) + \ldots + (\omega^{k\nu} - 1) . z^{k-1}.$$

Maintenant cette équation, qui n'est que du degré $k - 1$, ne peut subsister, à moins que tous ses coefficiens ne soient séparément égaux à zéro. Il faut donc qu'on ait

$$\omega^{k\nu} - 1 = 0, \text{ ou } \omega^{k\nu} = 1,$$

ce qui est impossible en remarquant que μ_1 est un nombre premier. Il faut donc que $k = 1$, or cela donne

$$s_0 + z = 0,$$

d'où

$$z = \sqrt[\mu_1]{y_1} = - s_0.$$

ce qui est de même impossible. Les équations (β) auront donc lieu.

Théorème II. Si une équation,

$$\varphi(y, m) = 0,$$

est satisfaite par une expression algébrique

$$y = p_0 + p_1 . \sqrt[\mu_1]{y_1} + \ldots$$

de l'ordre n, où n est plus grand que m, elle sera encore satisfaite en mettant au lieu de $\sqrt[\mu_1]{y_1}$ toutes les valeurs $\omega \sqrt[\mu_1]{y_1}$, $\omega^2 . \sqrt[\mu_1]{y_1}$ etc.

Théorème III. Si les deux équations:

$$\varphi(y,m)=0 \text{ et } \varphi_1(y,n)=0, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\varepsilon)$$

desquelles la première est irréductible, et $n =$ ou $< m$, ont une racine commune, il faut que

$$\varphi_1(y,n)=f(y,m).\varphi(y,m).$$

En effet, quel que soit $\varphi_1(y,n)$, nous pourrons faire

$$\varphi_1(y,n)=f(y,m).\varphi(y,m)+F(y,m),$$

où le degré de $F(y,m)$ est moindre que celui de $\varphi(y,m)$. Il faut donc, à cause des équations (ε), qu'on ait en même temps

$$F(y,m)=0,$$

ce qui ne peut subsister, à moins que tous les coefficiens de cette équation ne soient séparément égaux à zéro. Donc, quel que soit y, on a $F(y,m)=0$ et par suite,

$$\varphi_1(y,n)=f(y,m).\varphi(y,m).$$

Théorème IV. Si l'on a

$$\varphi_1(y,n)=f(y,m).\varphi(y,m), \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\zeta)$$

on doit avoir encore

$$\varphi_1(y,n)=f_1(y,m').\Pi\varphi(y,m).$$

En effet, en changeant dans l'équation (ζ) le radical extérieur $\sqrt[\mu]{y_1}$ successivement en $\omega\sqrt[\mu]{y_1}$, $\omega^2\sqrt[\mu]{y_1}$ etc., elle sera encore satisfaite. En désignant les valeurs correspondantes de $\varphi(y,m)$ par $\varphi'(y,m)$. $\varphi''(y,m)\ldots\varphi^{(\mu-1)}(y,m)$, la fonction $\varphi_1(y,n)$ sera divisible par toutes ces fonctions; donc aussi par leur produit, si elles n'ont point de facteurs communs. Or si l'on suppose par exemple que les deux équations $\varphi'(y,m)=0$, $\varphi''(y,m)=0$ aient lieu en même temps, on en tirera:

$$y^\nu+A_my^{\nu-1}+B_my^{\nu-2}+\ldots=0$$
$$y^\nu+A'_my^{\nu-1}+B'_my^{\nu-2}+\ldots=0.$$

Or si elles ont une racine commune, elles doivent être identiques. Donc les fonctions $\varphi(y,m)$, $\varphi'(y,m)$ etc. n'ont pas de facteurs communs, par suite la fonction $\varphi_1(y,n)$ sera divisible par le produit

$$\varphi(y,m).\varphi'(y,m)\ldots\varphi^{(\mu-1)}(y,m),$$

c'est-à-dire par $\Pi\varphi(y,m)$. Donc.

$$\varphi_1(y,n)=f_1(y.m').\Pi\varphi(y,m).$$

Théorème V. Si l'équation
$$\varphi(y,m)=0$$
est irréductible, celle-ci,
$$\Pi\varphi(y,m)=0=\varphi_1(y,m'),$$
le sera de même.

En effet, si elle ne l'était pas, supposons que
$$\varphi_2(y,m')=0$$
soit une telle équation. Alors les deux équations $\varphi_2(y,m')=0$ et $\varphi(y,m)=0$ auraient une racine commune, et par suite
$$\varphi_2(y,m')=f(y).\Pi\varphi(y,m)=f(y).\varphi_1(y,m'),$$
ce qui est impossible, car le degré de $\varphi_2(y,m')$ est moindre que celui de $\varphi_1(y,m')$. Donc etc.

Cela posé, rien n'est plus facile que de trouver l'équation la moins élevée à laquelle puisse satisfaire une expression algébrique.

Soit a_m l'expression dont il s'agit, et
$$a_m=f\left(y_m^{\frac{1}{\mu_m}},\ y_{m-1}^{\frac{1}{\mu_{m-1}}},\ldots\right),$$
et
$$\psi(y)=0,$$
l'équation irréductible à laquelle elle doit satisfaire.

La fonction doit d'abord être divisible par $y-a_m$. Or, si elle est divisible par $y-a_m$, elle est encore divisible par $\Pi(y-a_m)=\varphi(y,m_1)$. Mais $\varphi(y,m_1)$ est irréductible, donc $\psi(y)$ est de même divisible par
$$\Pi\varphi\ (y,m_1)=\varphi_1(y,m_2),$$
ensuite par
$$\Pi\varphi_1(y,m_2)=\varphi_2(y,m_3),$$
etc.

Maintenant les nombres m, m_1, $m_2,\ldots$ forment une suite décroissante, on doit donc enfin parvenir à une fonction
$$\varphi_\nu(y,m_{\nu+1}),$$
où $m_{\nu+1}=0$. Alors les coefficiens de cette fonction seront rationnels, et comme elle doit diviser la fonction $\psi(y)$, l'équation
$$\varphi_\nu(y,0)=0,$$
sera précisément l'équation cherchée.

Le degré de cette équation se trouve aisément. En effet on a successivement:

$$\delta\varphi\,(y,m_1) = \delta\Pi(y - a_m) = \mu_m$$
$$\delta\varphi_1(y,m_2) = \delta\Pi\varphi\,(y,m_1) = \mu_m\cdot\mu_{m_1}$$
$$\delta\varphi_2(y,m_3) = \delta\Pi\varphi_1(y,m_2) = \mu_m\cdot\mu_{m_1}\cdot\mu_{m_2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta\varphi_\nu(y,m_{\nu+1}) = \delta\Pi\varphi_{\nu-1}(y,m_\nu) = \mu_m\cdot\mu_{m_1}\cdots\mu_{m_\nu}.$$

Donc le degré de l'équation

$$\psi(y) = 0,$$

est

$$\mu_m\cdot\mu_{m_1}\cdot\mu_{m_2}\cdots\mu_{m_\nu},$$

dans le cas où $m_{\nu+1} = 0$.

De ce qui précède on peut maintenant déduire plusieurs conséquences importantes:

1. Le degré de l'équation irréductible à laquelle satisfait une expression algébrique, est le produit d'un certain nombre d'exposans radicaux qui se trouvent dans l'expression algébrique dont il s'agit. Parmi ces exposans se trouve toujours celui du radical extérieur.

2. L'exposant du radical extérieur est toujours un diviseur du degré de l'équation irréductible à laquelle satisfait une expression algébrique.

3. Si une équation irréductible peut être satisfaite algébriquement, elle est en même temps résoluble algébriquement. En effet, on aura toutes les racines en attribuant dans a_m aux radicaux $y_m^{\frac{1}{\mu_m}}$, $y_{m_1}^{\frac{1}{\mu_{m_1}}}$, … $y_{m_\nu}^{\frac{1}{\mu_{m_\nu}}}$ toutes les valeurs dont ils sont susceptibles.

4. Une expression algébrique qui peut satisfaire à une équation irréductible du degré μ, est susceptible d'un nombre de μ valeurs différentes entre elles, et pas davantage.

§. 3.

Sur la forme de l'expression algébrique qui peut satisfaire à une équation irréductible d'un degré donné.

Supposons maintenant que le degré de l'équation

$$\psi(y) = 0,$$

à laquelle satisfait l'expression algébrique a_m soit exprimé par μ; on doit avoir, comme nous avons vu,

$$\mu = \mu_m\cdot\mu_{m_1}\cdot\mu_{m_2}\cdots\mu_{m_\nu}.$$

Premier cas: si μ est un nombre premier.

Si μ est un nombre premier, on doit avoir

$$\mu_m = \mu,$$

et par suite,

$$a_m = p_0 + p_1 (y_m)^{\frac{1}{\mu}} + p_2 (y_m)^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} . (y_m)^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Les autres racines se trouvent en mettant au lieu de $y_m^{\frac{1}{\mu}}$, les valeurs $\omega y_m^{\frac{1}{\mu}}$, $\omega^2 y_m^{\frac{1}{\mu}}, \ldots \omega^{\mu-1} . y_m^{\frac{1}{\mu}}$. On aura ainsi en désignant par $z_1, z_2, \ldots z_\mu$ les racines de l'quation, et en faisant pour abréger $y_m = s$:

$$z_1 = p_0 + p_1 s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

$$z_2 = p_0 + p_1 \omega s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} . \omega^{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

. . . .

$$z_\mu = p_0 + p_1 \omega^{\mu-1} . s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^{\mu-2} . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} . \omega s^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Maintenant pour que ces quantités soient en effet des racines, il faut qu'on n'ait aucune nouvelle valeur en attribuant à tous les radicaux qui se trouvent dans les quantités $p_0, p_1, p_2 \ldots p_{\mu-1}$ et s, les valeurs dont ces radicaux sont susceptibles.

Soient $p'_0, p'_1, p'_2, \ldots p'_{\mu-1}. \; s'$ un système de valeurs ainsi formées, on doit avoir

$$p'_0 + p'_1 \omega' . s'^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + p'_{\mu-1} . \omega'^{\mu-1} . s'^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

$$= p_0 + p_1 \omega s^{\frac{1}{\mu}} + \ldots\ldots + p_{\mu-1} . \omega^{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

et à une valeur différente de ω' il répond une valeur différente de ω. En faisant donc $\omega' = 1, \omega, \omega^2, \ldots \omega^{\mu-1}$, on aura en désignant les valeurs correspondantes de ω par $\omega_0, \omega_1, \omega_2 \ldots \omega_{\mu-1}$:

$$p_0 + p_1 \omega_0 . s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega_0^2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots = p'_0 + p'_1 . s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 . s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

$$p_0 + p_1 \omega_1 . s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega_1^2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots = p'_0 + p'_1 \omega s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \omega^2 s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

. . . .

$$p_0 + p_1 \omega_{\mu-1} . s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega_{\mu-1}^2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots = p'_0 + p'_1 \omega^{\mu-1} . s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 \omega^{\mu-2} . s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

En ajoutant il viendra,

$$\mu p_0 = \mu p'_0, \text{ c'est-à-dire } p'_0 = p_0.$$

On trouvera de même,

$$\mu p'_1 . s'^{\frac{1}{\mu}} = p_1 . s^{\frac{1}{\mu}} (\omega_0 + \omega_1 . \omega^{-1} + \omega_2 . \omega^{-2} + \ldots + \omega_{\mu-1} . \omega^{-\mu+1})$$
$$+ p_2 . s^{\frac{2}{\mu}} (\omega_0^2 + \omega_1^2 \omega^{-1} + \ldots\ldots + \omega_{\mu-2}^2 . \omega^{-\mu+1})$$
$$+ \text{etc.}$$

Donc $$s'^{\frac{1}{\mu}} = q_1 . s^{\frac{1}{\mu}} + q_2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + q_{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}},$$

et de là $$s' = \left(q_1 . s^{\frac{1}{\mu}} + q_2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + q_{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right)^{\mu},$$

d'où $$s' = t_0 + t_1 . s^{\frac{1}{\mu}} + t_2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + t_{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (a)$$

Or je dis qu'on doit avoir $t_1 = 0$, $t_2 = 0, \ldots t_{\mu-1} = 0$.

En effet, dans le cas contraire on aurait $s^{\frac{1}{\mu}}$ égal à une fonction rationnelle de s, s', p_1, $p'_1 \ldots p_{\mu-1}$, $p'_{\mu-1}$, et par là z_1 égal à une fonction rationnelle de ces mêmes quantités.

Cela posé, on ne peut pas exprimer s', p'_1, $p'_2 \ldots$ rationnellement s, p_1. $p_2, \ldots$; car cela donnerait $s^{\frac{1}{\mu}}$ en fonction rationnelle de s, p_0, $p_1 \ldots$, ce qui est impossible. Mais si l'on cherche l'équation irréductible à laquelle pourra satisfaire z_1, on trouvera que son degré doit être un nombre composé, ce qui n'a pas lieu. Donc l'équation (a) ne peut avoir lieu à moins qu'on n'ait $t_1 = 0$, $t_2 = 0 \ldots t_{\mu-1} = 0$.

Cela donne:

$$\left(q_1 \omega . s^{\frac{1}{\mu}} + q_2 \omega^2 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + q_{\mu-1} . \omega^{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right)^{\mu} = s'$$
$$\left(q_1 \omega^2 . s^{\frac{1}{\mu}} + q_2 \omega^4 . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + q_{\mu-1} . \omega^{\mu-2} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}}\right)^{\mu} = s'$$
etc.

On conclut de là:

$$q_1 \omega s^{\frac{1}{\mu}} + q_2 \omega^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + q_{\mu-1} . \omega^{\mu-1} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}} = \omega^{\nu} . s'^{\frac{1}{\mu}};$$

mais $$q_1 \omega^{\nu} . s^{\frac{1}{\mu}} + q_2 \omega^{\nu} . s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + q_{\mu-1} . \omega^{\nu} . s^{\frac{\mu-1}{\mu}} = \omega^{\nu} . s'^{\frac{1}{\mu}};$$

donc

$$\omega^\nu q_1 = \omega q_1 , \; \omega^\nu \cdot q_2 = \omega^2 q_2 , \ldots \omega^\nu q_\nu = \omega^\nu q_\nu , \ldots \omega^\nu q_{\mu-1} = \omega^{\mu-1} \cdot q_{\mu-1} ,$$

et par suite

$$q_1 = 0, \; q_2 = 0, \ldots q_{\nu-1} = 0, \; q_{\nu+1} = 0 \ldots q_{\mu-1} = 0.$$

On aura donc

$$s'^{\frac{1}{\mu}} = q_\nu \cdot s^{\frac{\nu}{\mu}}, \; s'^{\frac{2}{\mu}} = q_\nu^2 \cdot s^{\frac{2\nu}{\mu}} , \text{ etc.}$$

Or nous avons

$$p'_0 + p'_1 s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots = p_0 + \omega p_1 s^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + \omega^\nu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \ldots ;$$

donc on en tire

$$p'_1 s'^{\frac{1}{\mu}} = \omega^\nu \cdot p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}},$$

et de là

$$p'^{\mu}_1 \cdot s' = p_\nu^\mu \cdot s^\nu$$

Maintenant puisque ν ne peut avoir que l'une des valeurs, $2, 3, \ldots \mu - 1$, il s'ensuit que $p^\mu_1 \cdot s$ n'aura qu'un nombre de $\mu - 1$ valeurs différentes. $p^\mu_1 \cdot s$ doit donc satisfaire à une équation qui est tout au plus du degré $\mu - 1$.

On peut faire $p_1 = 1$, et alors on aura

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

$$z_2 = p_0 + \omega s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^2 \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} \cdot \omega^{\mu-1} \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}}$$

. . . .

$$z_\mu = p_0 + \omega^{\mu-1} \cdot s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega^{\mu-2} \cdot s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-1} \cdot \omega \cdot s^{\frac{\mu-1}{\mu}} .$$

Je dis maintenant qu'on pourra exprimer les quantités $p_2, p_3, \ldots p_{\mu-1}$ rationnellement en s et les quantités connues.

On a

$$p_0 = \frac{1}{\mu} (z_1 + z_2 + \ldots\ldots + z_\mu) = \text{une quantité connue}$$

$$s^{\frac{1}{\mu}} = \frac{1}{\mu} (z_1 + \omega^{\mu-1} \cdot z_2 + \ldots + \omega z_\mu)$$

$$p_2 \cdot s^{\frac{2}{\mu}} = \frac{1}{\mu} (z_1 + \omega^{\mu-2} \cdot z_2 + \ldots + \omega^2 z_\mu)$$

. . . .

De là on tire:

$$p_2 s = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-1} . (z_1 + \omega^{-2}. z_2 + \ldots + \omega^{-2(\mu-1)}. z_\mu)(z_1 + \omega^{-1}. z_2 + \ldots + \omega^{-(\mu-1)}. z_\mu)^{\mu-2}$$

$$p_3 s = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-2} . (z_1 + \omega^{-3}. z_2 + \ldots + \omega^{-3(\mu-1)}. z_\mu)(z_1 + \omega^{-1}. z_2 + \ldots + \omega^{-(\mu-1)}. z_\mu)^{\mu-3}$$

. . . .

$$p_\nu s = \left(\frac{1}{\mu}\right)^{\mu-\nu+1} . (z_1 + \omega^{-\nu}. z_2 + \ldots + \omega^{-\nu(\mu-1)}. z_\mu)(z_1 + \omega^{-1}. z_2 + \ldots + \omega^{-(\mu-1)}. z_\mu)^{\mu-\nu}$$

. . . .

(La suite de ce mémoire qui, ce qui est bien à regretter, n'est pas terminé, consiste seulement dans les notices abrégées ci-dessous, dont il m'est bien réussi, comme on verra dans les notes, de démêler une partie, mais jusqu'à présent non pas tout.

Note de l'éditeur.)

$$q_1 + q_2 + \ldots + q_\nu = a_0$$

$$q_1 s_1 + q_2 s_2 + \ldots + q_\nu s_\nu = a_1$$

$$q_1 s_1^2 + q_2 s_2^2 + \ldots + q_\nu s_\nu^2 = a_2$$

. . . .

$$q_1 s_1^{\nu-1} + q_2 s_2^{\nu-1} + \ldots + q_\nu s_\nu^{\nu-1} = a_{\nu-1}$$

$$q_1(s_1^{\nu-1} + R_{\nu-2}. s_1^{\nu-1} + \ldots + R_1 s_1 + R_0) = a_0 R_0 + a_1 R_1 + a_2 R_2 + \ldots + a_{\nu-2} R_{\nu-2} + a_{\nu-1},$$

c'est-à-dire

$$q_1 = f(s, \ldots)$$

tant que non

$$s_1^{\nu-1} + \ldots + R_0 = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3) \ldots (s_1 - s_\nu) = 0.$$

Or soit

$$s_1 = s_n$$

$$(z_1 + \omega^{-1}. z_2 + \omega^{-2}. z_3 + \ldots)^\mu = (z_1 + \omega_1 z_2 + \omega_2 z_3 + \ldots)^\mu$$

$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

$$+ \omega_1 p_0 + \omega_1 \omega s^{\frac{1}{\mu}} + p_2 \omega_1 \omega^2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots$$

$$+ \omega_2 p_0 + \omega_2 \omega^2 s^{\frac{1}{\mu}} + \ldots$$

$$1 + \omega_1 \omega + \omega_2 \omega^2 + \ldots + \omega_{\mu-1}. \omega^{\mu-1} = 1,$$

ce qui est impossible; donc

$q_1 = p_m . s$ rationnel en s et en les quantités connues.

Donc

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2(s) s^{\frac{2}{\mu}} + f_3(s). s^{\frac{3}{\mu}} + \ldots + f_{\mu-1}(s). s^{\frac{\mu-1}{\mu}}.$$

Soit $P = 0$ l'équation la moins élevée en s du degré ν, les ν racines de cette équation seront de la forme

$$s,\ p_{m'}.s^{m'},\ p_{m''}.s^{m''},\ \ldots p_{m^{(\nu-1)}}.s^{m^{(\nu-1)}}$$

$m', m'', \ldots m^{(\nu-1)}$ se trouvant parmi celles-ci

$$2,\ 3,\ 4,\ \ldots \mu - 1.$$

$$s_1 = p_0.s^m$$
$$s_2 = p_1.s_1{}^m$$
$$\cdots\cdots$$
$$s = p_{k-1}.s^m{}_{k-1} = p_{k-1}.p^m{}_{k-2}.p^{m^2}{}_{k-3}\ldots p_0{}^{m^{k-1}}.s^{m^k},$$
$$\frac{m^k - 1}{\mu} = \text{entier},\ k = \text{facteur de } \mu - 1,$$
$$k = \nu,\ \text{ou } k < \nu.$$

Soit m une racine primitive pour le module μ, on pourra représenter z_1 par

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_1 s^{\frac{m}{\mu}} + p_2 s^{\frac{m^2}{\mu}} + \ldots + p_{\mu-2}.s^{\frac{m^{\mu-2}}{\mu}}.$$

Soient $s_1, s_2, s_3, \ldots s_\nu$ les valeurs de s, on doit avoir

$$s_1^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha s^{\frac{m^\alpha}{\mu}}$$
$$s_2^{\frac{1}{\mu}} = p'_\alpha.s_1{}^{\frac{m^\alpha}{\mu}}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha{}^{(k-1)}.s_{k-1}{}^{\frac{m^\alpha}{\mu}}$$
$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha{}^{(k-1)}.(p_\alpha{}^{(k-2)})^{m^\alpha}.(p_\alpha{}^{(k-3)})^{m^{2\alpha}}\ldots(p_\alpha^0)^{m^{(k-1)\alpha}}.s^{\frac{m^{\alpha k}}{\mu}}$$
$$\frac{m^{\alpha k} - 1}{\mu} = \text{entier},$$
$$k = \text{facteur de } \mu - 1,$$
$$\alpha k = (\mu - 1)n,$$
$$\frac{\mu - 1}{k} = \beta,$$
$$\alpha = n\beta.$$

Soit $q.s^{\frac{m^{n'\beta'}}{\mu}}$ une autre racine

$$s' = q_1.s^{\frac{m^{n\beta + n'\beta'}}{\mu}}$$

en sera encore une.

Il faut donc que

$$k''(n\beta + n'\beta') = n''(\mu - 1)$$

$$\beta = \alpha\beta''$$

$$\beta' = \alpha'\beta''$$

$$\mu - 1 = e\alpha\alpha'\beta''$$

$$k''(n\alpha + n'\alpha')\beta'' = n''e\alpha\alpha'\beta''$$

$$k''(n\alpha + n'\alpha') \quad = n''e\alpha\alpha'$$

$$k'' = \alpha\alpha' . k'''$$

$$k'''(n\alpha + n'\alpha') = n''e$$

$$s' = q_1 . s^{\frac{m^{(n\alpha+n'\alpha')\beta''}}{\mu}}$$

$$n\alpha + n'\alpha' = 1$$

$$s' = q_1 . s^{\frac{m^{\beta''}}{\mu}}$$

$$\mu - 1 = k\beta$$

$$\mu - 1 = k'\beta'$$

$$\mu - 1 = k''\beta'',$$

mais $\beta'' < \beta$, $\beta'' < \beta'$; donc $k'' > k$, $k'' > k'$, ce qui est contre l'hypothèse; donc les racines de l'équation

$$P = 0$$

pourront être représentées par

$$s$$

$$s_1 = (f(s))^{\mu} \; . s^{m^{\alpha}}$$

$$s_2 = (f(s_1))^{\mu} . s_1{}^{m^{\alpha}}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$s_{\nu-1} = (f(s_{\nu-2}))^{\mu} . s^{m^{\alpha}}{}_{\nu-2}$$

où

$$s = (f(s_{\nu-1}))^{\mu} . s^{m^{\alpha}}{}_{\nu-1}$$

$$\alpha = \frac{\mu-1}{\nu}.$$

Le degré de l'équation $P = 0$ doit donc être un facteur de $\mu - 1$.

Désignons $(f(s))^{\mu} . s^{m^{\alpha}}$ par θs, les racines deviendront

$$s, \theta s, \theta^2 s, \theta^3 s, \ldots \theta^{\nu-1} s \text{ où } \theta^{\nu} s = s.$$

On a encore

$$s_1 = (f(s))^{\mu} . s^{m^{\alpha}}$$
$$s_2 = (f(s_1))^{\mu} . (f(s))^{\mu \cdot m^{\alpha}} . s^{m^{2\alpha}}$$
$$s_3 = (f(s_2))^{\mu} . (f(s_1))^{\mu \cdot m^{\alpha}} . (f(s))^{\mu \cdot m^{2\alpha}} . s^{m^{3\alpha}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{aligned} z_1 = p_0 &+ s^{\frac{1}{\mu}} + f_1(s) . s^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}} + f_2(s) . s^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} + \ldots + f_{\nu-1}(s) . s^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} \\ &+ f'_0(s) . s^{\frac{m}{\mu}} + f'_1(s) . s^{\frac{m^{\alpha+1}}{\mu}} + f'_2(s) . s^{\frac{m^{2\alpha+1}}{\mu}} + \ldots + f'_{\nu-1}(s) . s^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha+1}}{\mu}} \\ &+ f''_0(s) . s^{\frac{m^2}{\mu}} + f''_1(s) . s^{\frac{m^{\alpha+2}}{\mu}} + f''_2(s) . s^{\frac{m^{2\alpha+2}}{\mu}} + \ldots + f''_{\nu-1}(s) . s^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha+2}}{\mu}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ f_0^{(\alpha-1)}(s) . s^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + f_1^{(\alpha-1)}(s) . s^{\frac{m^{2\alpha-1}}{\mu}} + f_2^{(\alpha-1)}(s) . s^{\frac{m^{3\alpha-1}}{\mu}} + \ldots + f_{\nu-1}^{(\alpha-1)}(s) . s^{\frac{m^{\nu\alpha-1}}{\mu}} . \end{aligned}$$

$$s_n^{\frac{1}{\mu}} = f_n(s) . s^{\frac{m^{n\alpha}}{\mu}}$$
$$s_n^{\frac{m^{\delta}}{\mu}} = (f_n(s))^{m^{\delta}} . s^{\frac{m^{\delta+n\alpha}}{\mu}}$$
$$f_n^{(\delta)}(s) . (f_n(s))^{-m^{\delta}} . s_n^{\frac{m^{\delta}}{\mu}} = f_n^{(\delta)}(s) . s^{\frac{m^{n\alpha+\delta}}{\mu}} .$$

$$\begin{aligned} z_1 = p_0 &+ s^{\frac{1}{\mu}} + s_1^{\frac{1}{\mu}} + s_2^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} \\ &+ \varphi_1(s) . s^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1(s_1) . s_1^{\frac{m}{\mu}} + \varphi_1(s_2) . s_2^{\frac{m}{\mu}} + \ldots + \varphi_1(s_{\nu-1}) . s_{\nu-1}^{\frac{m}{\mu}} \\ &+ \varphi_2(s) . s^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2(s_1) . s_1^{\frac{m^2}{\mu}} + \varphi_2(s_2) . s_2^{\frac{m^2}{\mu}} + \ldots + \varphi_2(s_{\nu-1}) . s_{\nu-1}^{\frac{m^2}{\mu}} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \varphi_{\alpha-1}(s) . s^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1}(s_1) . s_1^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \varphi_{\alpha-1}(s_2) . s_2^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} + \ldots + \varphi_{\alpha-1}(s_{\nu-1}) . s_{\nu-1}^{\frac{m^{\alpha-1}}{\mu}} . \end{aligned}$$

$$s^{\frac{1}{\mu}} = A . a^{\frac{1}{\mu}} . a_1^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}}$$
$$s_1^{\frac{1}{\mu}} = A_1 . a^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}} . a_1^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{3\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}}$$
$$s_2^{\frac{1}{\mu}} = A_2 . a^{\frac{m^{2\alpha}}{\mu}} . a_1^{\frac{m^{3\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} . a_{\nu-1}^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$s_{\nu-1}^{\frac{1}{\mu}} = A_{\nu-1} . a^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} . a_1^{\frac{1}{\mu}} . a_2^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}} \ldots a_{\nu-1}^{\frac{m^{(\nu-1)\alpha}}{\mu}} .$$

$$\frac{1}{\mu}.\log s = \log A + \frac{1}{\mu}\log a + \frac{m^{\alpha}}{\mu}\log a_1 + \frac{m^{2\alpha}}{\mu}\log a_2 + \dots$$

$$\frac{1}{\mu}.\log s_1 = \log A_1 + \frac{m^{\alpha}}{\mu}\log a + \frac{m^{2\alpha}}{\mu}\log a_1 + \frac{m^{3\alpha}}{\mu}\log a_2 + \dots$$

. . . .

$$s^{\frac{m^{\alpha}}{\mu}} : s_1^{\frac{1}{\mu}} = (A^{m^{\alpha}} : A_1).a_{\nu-1}^{\frac{m^{\nu\alpha}-1}{\mu}}.$$

$$\psi(y)$$

$$y^m + f(s).y^{m-1} + f'(s).y^{m-2} + \dots = 0 = \varphi(y, s),$$

$$y^m + f(s').y^{m-1} + f'(s').y^{m-2} + \dots = 0 = \varphi(y, s')$$

$$\varphi(s, \varrho) = 0,\ \varphi(s_1, \varrho_1) = 0,\ \varphi(s_2, \varrho_2) = 0 \dots$$

$$f(y, s, \quad \varrho) = 0,$$

$$f(y, s_1, \varrho_1) = 0,$$

$$f(y, s_2, \varrho_2) = 0,$$

. . . .

$$f(y, s_{\nu-1}, \varrho_{\nu-1}) = 0.$$

$$F(y, s, s_1, s_2, \dots s_{\nu-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\nu-1}) = 0$$

$s_{\nu-1}, s_{\nu-2}, s_{\nu-3}, \dots s_{\varepsilon}$ fonctions rationnelles

de $s, s_1, s_2, \dots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_{\nu-1}$.

$F(y, s, s_1, s_2, \dots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2, \dots \varrho_{\nu-1})$ sera facteur de $\psi(y)$ pour toutes les valeurs de $s, s_1, s_2, \dots$

Donc le degré de $\psi(y)$ est divisible par μ^{ε}.

Il y a deux cas:

1. si $\delta\psi(y) = \mu^{\varepsilon}$
2. si $\delta\psi(y) = \mu^{\varepsilon}.\mu'$.

Dans le premier cas:

$$y = f(s, s_1, s_2 \dots s_{\varepsilon-1}, \varrho, \varrho_1, \varrho_2 \dots \varrho_{\mu-1}).$$

Dans le second cas:

$$\delta F(y, s, s_1 \dots \varrho, \varrho_1 \dots) = \mu'$$

$$F(y, s, s_1, \dots \varrho, \varrho_1 \dots) = y^{\mu'} + f(s, s_1, \dots \varrho, \varrho_1 \dots)y^{\mu'-1} + f'(s, s_1, \dots \varrho, \varrho_1 \dots)y^{\mu'-2} + \dots$$

Soit $$z = F(a, s, s_1 \dots \varrho, \varrho_1 \dots)$$

z n'obtiendra pour les différents radicaux qu'un nombre de μ^{ε} valeurs différentes; donc z sera racine d'une équation du degré μ^{ε}. Par suite

$$\psi(y) = 0$$

donne $$y^{\mu'} + f(z) \cdot y^{\mu'-1} + f'(z) \cdot y^{\mu'-2} + \dots = 0$$

où z est déterminé par une équation du degré μ^{ε}.

$$f(y, s)$$

$$f\left(y, \sqrt[\mu]{R}, \ p, \ q, \ \dots\right) = 0,$$

$$f\left(y, \sqrt[\mu]{R_1}, p_1, q_1, \dots\right) = 0,$$

$$f\left(y, \sqrt[\mu]{R_2}, p_2, q_2, \dots\right) = 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$f\left(y, \sqrt[\mu]{R_{\nu-1}}, p_{\nu-1}, q_{\nu-1}, \dots\right) = 0.$$

$$\psi(y) = \Pi f\left(y, \sqrt[\mu]{R}, p, q, \dots\right) = \Pi f\left(y, \sqrt[\mu]{R_1}, p_1, q_1, \dots\right) = \dots$$

$$\dots = \Pi f\left(y, \sqrt[\mu]{R_{\nu-1}}, p_{\nu-1}, q_{\nu-1}, \dots\right)$$

$$f\left(y, \sqrt[\mu]{R}, \sqrt[\mu]{R_1}, \sqrt[\mu]{R_2}, \dots \sqrt[\mu]{R_{\nu-1}}, p, q, \dots p_1, q_1, \dots p_{\nu-1}, q_{\nu-1}\right) = 0,$$

$$f\left(y, \sqrt[\mu]{R}, \sqrt[\mu]{R_1}, \dots \sqrt[\mu]{R_{\varepsilon-1}}, p, q, \dots p_1, q_1, \dots p_{\nu-1}, q_{\nu-1}, R_{\varepsilon}, R_{\varepsilon+1} \dots R_{\nu-1}\right) = 0.$$

XVI.

Démonstration de quelques formules elliptiques.

1.

Soient a_0, a_1, $a_2 \ldots b_0$, b_1, $b_2 \ldots$ des quantités quelconques dont l'une au moins est variable. Soit

$$p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$
$$q = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

et supposons

1. $p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = A\ (x - \varphi\theta_1)(x - \varphi\theta_2)\ldots(x - \varphi\theta_\mu)$,

où A est une constante. Alors je dis qu'on aura

$$\varphi(\pm\,\theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \cdots \pm \theta_\mu) = C$$

en déterminant convenablement le signe des quantités θ_1, θ_2, $\ldots\,\theta_\mu$.

Démonstration. En posant dans l'équation (1) x égal à l'une des quantités $\varphi\theta_1$, $\varphi\theta_2$, $\ldots\,\varphi\theta_\mu$, on aura,

2. $$p^2 - q^2(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2) = 0,$$

d'où l'on tire, $$p = \pm\, q\sqrt{(1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)};$$

ou bien en faisant $$x = \varphi\theta,$$

$$p = \pm\, q.f\theta.F\theta.$$

Désignons le premier membre de l'équation (2) par R, on aura, en différentiant par rapport à x et a_0, $a_1 \ldots b_0$, $b_1 \ldots$

3. $$\left(\frac{dR}{dx}\right).dx + \delta R = 0,$$

où le signe δ se rapporte seulement aux quantités a_0, $a_1 \ldots b_0$, $b_1 \ldots$; mais

$$\delta R = 2p\delta p - 2q\delta q\ (1 - c^2x^2)(1 + e^2x^2)$$
$$= 2p\delta p - 2q\delta q\ (f\theta)^2.(F\theta)^2.$$

Donc en mettant pour p sa valeur $\pm\, q.f\theta.F\theta$, et pour q sa valeur $\pm\frac{p}{f\theta.F\theta}$,

$$\delta R = \pm\, 2f\theta.F\theta(q\delta p - p\delta q).$$

L'équation (5) deviendra donc

$$\left(\frac{dR}{dx}\right).dx \pm 2f\theta.F\theta(q\delta p - p\delta q) = 0.$$

Or $x = \varphi\theta$, donc $dx = d\theta.f\theta.F\theta$; par suite

$$d\theta = \pm \frac{2(qdp - pdq)}{\left(\frac{dR}{dx}\right)}.$$

Le numérateur $\pm 2(pdq - qdp)$ est une fonction entière de x; en la désignant par $\psi(x)$ et faisant $\left(\frac{dR}{dx}\right) = \lambda(x)$, on aura,

$$\pm d\theta = \frac{\psi(x)}{\lambda(x)}.$$

Soit pour abréger $\varphi\theta_m = x_m$, l'équation précédente donnera:

$$\pm d\theta_1 = \frac{\psi(x_1)}{\lambda(x_1)}, \pm d\theta_2 = \frac{\psi(x_2)}{\lambda(x_2)} \dots \pm d\theta_\mu = \frac{\psi(x_\mu)}{\lambda(x_\mu)}.$$

Donc

$$\pm d\theta_1 \pm d\theta_2 \pm \dots \pm d\theta_\mu = \frac{\psi(x_1)}{\lambda(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{\lambda(x_2)} + \dots + \frac{\psi(x_\mu)}{\lambda(x_\mu)}.$$

Maintenant le degré de la fonction entière $\psi(x)$ est nécessairement moindre que celui de $\lambda(x)$; donc, d'après un théorème connu, le second nombre de l'équation précédente s'évanouira. On aura par conséquent:

$$\pm d\theta_1 \pm d\theta_2 \pm d\theta_3 \pm \dots \pm d\theta_\mu = 0.$$

De là on tire en intégrant:

$$\pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \dots \pm \theta_\mu = \text{const.}$$

et par suite:

$$\varphi(\pm \theta_1 \pm \theta_2 \pm \theta_3 \pm \dots \pm \theta_\mu) = C$$

c. q. f. d.

Le signe des quantités θ_1, $\theta_2 \dots$ n'est pas arbitraire. Il est le même que celui de l'équation,

$$p = \pm q.f\theta.F\theta.$$

2.

Je suis parvenu à ces deux formules: (Voyez Tome 1 pag. 220)

1. $$\begin{cases} \varphi\left(\alpha.\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1} - \sin\left(3\alpha.\frac{\pi}{2}\right).\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}+1} + \sin\left(5\alpha.\frac{\pi}{2}\right).\frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}+1} - \dots\right\}, \\ f\left(\alpha.\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right).\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-1} - \cos\left(3\alpha.\frac{\pi}{2}\right).\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}-1} + \cos\left(5\alpha.\frac{\pi}{2}\right).\frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}-1} - \dots\right\}, \end{cases}$$

où $\frac{\omega}{2} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}$, $f\left(\alpha . \frac{\omega}{2}\right) = \sqrt{\left[1 - \varphi^2\left(\alpha \frac{\omega}{2}\right)\right]}$, et la fonction φ déterminée par la formule,

$$\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

en faisant $x = \varphi\theta$.

Si l'on développe la fonction $\varphi\theta$ suivant les puissances de θ, il est clair qu'on aura un résultat de la forme:

$$\varphi\theta = \theta + \frac{A_1 . \theta^5}{1.2.3.4.5} + \frac{A_2 . \theta^9}{1.2.3\ldots 9} + \ldots + \frac{A_n . \theta^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)} + \ldots,$$

où A_1, $A_2 \ldots A_n \ldots$ sont des nombres rationnels et même entiers. On aura de même, en développant la fonction $f\theta$:

$$f\theta = 1 - \tfrac{1}{2}\theta^2 + \frac{B_2 . \theta^4}{1.2.3.4} - \frac{B_3 . \theta^6}{1.2\ldots 6} + \ldots \pm \frac{B_n . \theta^{2n}}{1.2\ldots 2n} + \ldots$$

En vertu de ces formules les deux équations (1) donneront, en développant suivant les puissances de α:

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1} - 3^{4n-1} . \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{c^{3\pi}+1} + 5^{4n-1} . \frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}+1} - \ldots = 0.$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1} - 3^{4n+1} . \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}+1} + 5^{4n+1} . \frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}+1} - \ldots = \tfrac{1}{4} A_n . \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{4n+2}.$$

$$\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}-1} - 3^{2n} . \frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}-1} + 5^{2n} . \frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}-1} - \ldots = \tfrac{1}{4} B_n . \left(\frac{\omega}{\pi}\right)^{2n+1}.$$

La première de ces formules a été trouvée par M. *Cauchy* dans ses exercises de Mathématiques T. II pag 267.

XVII.

Méthode générale de trouver des fonctions d'une seule quantité variable lorsqu'une propriété de ces fonctions est exprimée par une équation entre deux variables indépendantes.

Soient x et y deux quantités variables indépendantes, α, β, γ, δ etc. des fonctions données de x et y, et φ, f, F etc. des fonctions cherchées entre lesquelles une relation est exprimée par une équation $V = 0$, comprenant d'une manière quelconque les quantités x, y, $\varphi\alpha$, $f\beta$, $F\gamma$ etc. et leurs différentielles. On pourra en général à l'aide de cette seule équation trouver toutes les fonctions inconnues dans les cas où le problème est possible.

Pour trouver l'une des fonctions il est clair qu'on doit chercher une équation où cette fonction est la seule inconnue et par conséquent chasser toutes les autres. Cherchons donc d'abord à chasser une fonction inconnue par exemple $\varphi\alpha$ et ses différentielles. Les quantités x et y étant indépendantes on en peut regarder l'une, ou une fonction donnée des deux, comme constante. On peut donc différentier l'équation $V = 0$ par rapport à l'une des variables x, en considérant α comme constant, et dans ce cas l'autre variable y doit être considéré comme fonction de x et de α. Or en différentiant l'équation $V = 0$ plusieurs fois de suite en supposant α constant, il ne se trouvera pas dans les équations résultantes d'autres fonctions de α que celles qui sont comprises dans l'équation $V = 0$, savoir $\varphi\alpha$ et ses différentielles. Donc si la fonction V contient

$$\varphi\alpha,\ d\varphi\alpha,\ d^2\varphi\alpha, \ldots d^n\varphi\alpha,$$

on obtiendra, en différentiant l'équation $V = 0$ $n + 1$ fois de suite dans la supposition de α constant, les $n + 2$ équations suivantes:

$$V = 0,\ dV = 0,\ d^2V = 0, \ldots d^{n+1}V = 0.$$

Eliminant de ces $n + 2$ équations les $n + 1$ quantités inconnues

$$\varphi\alpha,\ d\varphi\alpha,\ d^2\varphi\alpha, \text{ etc.}$$

il en résultera une équation $V_1 = 0$ qui ne contiendra ni la fonction $\varphi\alpha$ ni ses différentielles, mais seulement les fonctions $f\beta$, $F\gamma$, etc. et leurs différentielles.

Cette équation $V_1 = 0$ pourra maintenant être traitée de la même manière par rapport à l'une des autres fonctions inconnues $f\beta$, et on obtiendra une équation $V_2 = 0$ qui ne contiendra ni $\varphi\alpha$ ou ses différentielles, ni $f\beta$ ou ses différentielles, mais seulement $F\gamma$ etc. et les différentielles de ces fonctions.

De cette manière on peut continuer l'élimination des fonctions inconnues jusqu'à ce qu'on est parvenu à une équation qui ne contient qu'une seule fonction inconnue avec ses différentielles, et en regardant maintenant l'une des quantités variables comme constante, on a une équation différentielle entre la fonction inconnue et l'autre variable d'où l'on pourra donc tirer cette fonction par intégration.

On peut observer qu'il suffit d'éliminer jusqu'à ce qu'on aura obtenu une équation qui ne contient que deux fonctions inconnues et leurs différentielles, car, si par exemple ces fonctions sont $\varphi\alpha$ et $f\beta$, on pourra, en supposant β constant, exprimer x et y en fonctions de α à l'aide des deux équations $\alpha = \alpha$ et $\beta = c$ et parvenir de cette manière à une équation différentielle entre $\varphi\alpha$ et α d'où l'on pourra par conséquent trouver $\varphi\alpha$. De la même manière on trouvera une équation entre $f\beta$ et β en déterminant x et y par les équations $\alpha = c$ et $\beta = \beta$. Ces fonctions étant ainsi trouvées, on trouvera aisément les autres fonctions à l'aide des équations restantes.

De cette manière on pourra donc en général trouver toutes les fonctions inconnues, tant que le problème est possible. Pour examiner cela, il faut substituer les valeurs trouvées dans l'équation donnée, et voir si elle est satisfaite.

Ce qui précède dépend, comme nous venons de voir, de la différentiation d'une fonction de x et y par rapport à x, en supposant constante une fonction donnée de x et y; y est donc fonction de x et dans les différentielles se trouvent les expressions $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, $\frac{d^3y}{dx^3}$, etc. Ces expressions se trouvent aisément en différentiant l'équation $\alpha = c$ par rapport à x et en supposant y fonction de x. En effet, on obtiendra les équations suivantes:

$$\frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$\frac{d^2\alpha}{dx^2} + 2\,\frac{d^2\alpha}{dx.dy} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{d^2\alpha}{dy^2} \cdot \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{d\alpha}{dy} \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = 0,$$

etc.

d'où l'on tire

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\left(\frac{d^2\alpha}{dx^2}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)} + 2.\frac{\left(\frac{d^2\alpha}{dx.dy}\right)\cdot\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2} - \frac{\left(\frac{d^2\alpha}{dy^2}\right)\cdot\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^3},$$

etc.

La méthode générale de résoudre l'équation $V = 0$ est applicable dans tous les cas où l'élimination peut s'effectuer, mais il peut arriver que cela ne soit pas possible, et alors il faut avoir recours au calcul des différences, mais pour n'être pas trop long, je ne m'occuperai pas ici de ce cas, mais je renvoie le lecteur au *Lacroix* trité du calc. diff. et du calc. intégr. tome III pag. 208, où l'on trouvera comment on doit s'y prendre dans ce cas.

Nous allons appliquer la théorie générale à quelques exemples.

1. Trouver la fonction φ qui satisfait à l'équation

$$\varphi\alpha = f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma)$$

f étant une fonction quelconque donnée.

En différentiant cette équation par rapport à x en supposant α constant on aura

$$0 = f'x + f'y\cdot\frac{dy}{dx} + f'(\varphi\beta).\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx} + \frac{d\beta}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right) + f'(\varphi\gamma).\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx} + \frac{d\gamma}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}\right),$$

or nous avons vu que

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)};$$

cette valeur étant substituée dans l'équation ci-dessus, on obtiendra après avoir multiplié par $\frac{d\alpha}{dy}$:

$$0 = f'x.\left(\frac{d\alpha}{dy}\right) - f'y\cdot\frac{d\alpha}{dx} + f'(\varphi\beta).\varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dy}\right) + f'(\varphi\gamma).\varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\gamma}{dy}\right).$$

Faisant maintenant γ constant, déterminant x et y en β par les deux équations $\gamma = c$, $\beta = \beta$ et substituant leur valeurs, on obtiendra entre $\varphi\beta$ et β une équation différentielle du premier ordre, d'où l'on tirera la fonction $\varphi\beta$.

Soit $$f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma) = \varphi\beta + \varphi\gamma,$$
on aura $$f'(x) = 0,\ f'(y) = 0,\ f'(\varphi\beta) = 1,\ f'(\varphi\gamma) = 1.$$
L'équation deviendra donc
$$0 = \varphi'\beta\left(\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dy}\right) + \varphi'\gamma\left(\frac{d\gamma}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\gamma}{dy}\right);$$
on tire de là en intégrant
$$\varphi\beta = \varphi'\gamma\int\frac{\frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\gamma}{dy} - \frac{d\alpha}{dy}\cdot\frac{d\gamma}{dx}}{\frac{d\beta}{dx}\cdot\frac{d\alpha}{dy} - \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{d\beta}{dy}}.d\beta.$$
On voit aisément que sans diminuer la généralité du problème on peut faire $\beta = x$ et $\gamma = y$, et on aura
$$\frac{d\beta}{dx} = 1,\quad \frac{d\beta}{dy} = 0,\quad \frac{d\gamma}{dx} = 0,\quad \frac{d\gamma}{dy} = 1.$$
Ayant donc $$\varphi\alpha = \varphi x + \varphi y,$$
on en conclut
$$\varphi x = \varphi' y\int\frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)}.dx,$$
où y est supposé constant après la différentiation.

Appliquons cela à la recherche du logarithme.

On a $$\log(xy) = \log x + \log y,$$
donc $$\alpha = xy,\ \frac{d\alpha}{dx} = y,\ \frac{d\alpha}{dy} = x;$$
substituant ces valeurs on obtient
$$\varphi x = \varphi' y\int\frac{y}{x}.dx = c\int\frac{dx}{x};$$
donc $$\log x = c\int\frac{dx}{x}.$$
Si l'on veut trouver l'arc tang (x), on a
$$\text{arc tang}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) = \text{arc tg.}(x) + \text{arc tg.}(y),$$
donc $$\alpha = \frac{x+y}{1-xy}$$
et par suite
$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{1}{1-xy} + \frac{y(x+y)}{(1-xy)^2} = \frac{1+y^2}{(1-xy)^2},$$
$$\frac{d\alpha}{dy} = \frac{1}{1-xy} + \frac{x(y+x)}{(1-xy)^2} = \frac{1+x^2}{(1-xy)^2}.$$

On tire de là

$$\frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)} = \frac{1+y^2}{1+x^2},$$

par conséquent $\varphi x = \varphi' y . \int \frac{1+y^2}{1+x^2} . dx,$

et de là

$$\text{arc tg. } (x) = c \int \frac{dx}{1+x^2} = \int \frac{dx}{1+x^2} \text{ en faisant } c = 1.$$

Supposons maintenant

$$f(x, y, \varphi\beta, \varphi\gamma) = \varphi\beta . \varphi\gamma = \varphi x . \varphi y$$

en faisant $\beta = x$ et $\gamma = y$.

On aura donc

$$f'x = f'y = 0 \quad f'(\varphi x) = \varphi y, \; f'(\varphi y) = \varphi x$$

$$\frac{d\beta}{dx} = \frac{d\gamma}{dy} = 1, \quad \frac{d\beta}{dy} = \frac{d\gamma}{dx} = 0.$$

L'équation deviendra donc

$$\varphi y . \varphi' x . \frac{d\alpha}{dy} - \varphi x . \varphi' y . \frac{d\alpha}{dx} = 0;$$

donc
$$\frac{\varphi' x}{\varphi x} = \frac{\varphi' y}{\varphi y} . \frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)},$$

et en intégrant
$$\log \varphi x = \frac{\varphi' y}{\varphi y} \int \frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)} . dx.$$

Soit
$$\int \frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)} . dx = T,$$

on aura
$$\varphi x = e^{cT}.$$

Soit par exemple $\alpha = x + y$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx} = 1 = \frac{d\alpha}{dy}, \text{ donc } T = \int dx = x,$$

et
$$\varphi x = e^{cx}.$$

Soit $\alpha = xy$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx} = y, \quad \frac{d\alpha}{dy} = x, \; T = \int \frac{dx}{x} = \log x$$

donc $$\varphi x = e^{c.\log x},$$
c'est-à-dire $$\varphi x = x^c.$$
Si l'on cherche la résultante R de deux forces égales P dont les directions font un angle égal à $2x$, on trouvera que $R = P.\varphi x$, où φx est une fonction qui satisfait à l'équation
$$\varphi x.\varphi y = \varphi(x+y) + \varphi(x-y)$$
(Voyez Poisson traité de mécanique Tome I pag 14.)

Pour déterminer cette fonction, il faut différentier l'équation par rapport à x en supposant $y + x =$ const. et on aura
$$\varphi' x.\varphi y + \varphi x.\varphi' y.\frac{dy}{dx} = \varphi'(x-y)\left(1 - \frac{dy}{dx}\right);$$
mais de l'équation $x + y = c$ on tire $\frac{dy}{dx} = -1$.

Substituant cette valeur on obtient
$$\varphi' x.\varphi y - \varphi x.\varphi' y = 2\varphi'(x-y).$$
Différentiant maintenant par rapport à x en supposant $x - y =$ const. on aura
$$\varphi'' x.\varphi y + \varphi' x.\varphi' y.\frac{dy}{dx} - \varphi' x.\varphi' y - \varphi x.\varphi'' y.\frac{dy}{dx} = 0;$$
or l'équation $x - y = c$ donne $\frac{dy}{dx} = 1$,
donc $$\varphi'' x.\varphi y - \varphi x.\varphi'' y = 0.$$
La supposition de y constant donne
$$\varphi'' x + c\varphi x = 0,$$
d'où l'on tire en intégrant $\varphi x = \alpha.\cos(\beta x + \gamma)$
α, β et γ étant des constantes. En déterminant celles-ci par les conditions du problème, on trouvera
$$\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = 0;$$
donc $\varphi x = 2\cos x$, et par suite $R = 2P.\cos x$.

2. Déterminer les trois fonctions φ, f et ψ qui satisfont à l'équation
$$\psi\alpha = F(x, y, \varphi x, \varphi' x, \ldots fy, f'y, \ldots)$$
où α est une fonction donnée de x et de y, et F une fonction donnée des quantités entre les parenthèses.

Différentiant l'équation par rapport à x en supposant α constant et écrivant ensuite $-\frac{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)}{\left(\frac{d\alpha}{dy}\right)}$ au lieu de $\frac{dy}{dx}$, on obtiendra l'équation suivante

$$\frac{\frac{d\alpha}{dx}}{\frac{d\alpha}{dy}} = \frac{F'x + F'(\varphi x).\varphi' x + \dots}{F'y + F'(fy).f'y + \dots}.$$

Si dans cette équation on fait y constant, on a une équation différentielle entre φx et x d'où l'on peut tirer φx, et si l'on fait x constant, on a une équation différentielle d'où l'on peut tirer fy; ces deux fonctions étant trouvées, la fonction $\psi\alpha$ se trouvera sans difficulté par l'équation proposée.

Exemple. Trouver les trois fonctions qui satisfont à l'équation

$$\psi(x+y) = \varphi x.f'y + fy.\varphi' x.$$

On a ici $\qquad F(x, y, \varphi x, \varphi' x\ fy, f'y) = \varphi x.f'y + fy.\varphi' x;$

donc $\qquad F'x = F'y = 0,\ F'(\varphi x) = f'y,\ F'(\varphi' x) = fy,$

$$F'(fy) = \varphi' x,\ F'(f'y) = \varphi x;$$

de plus $\qquad \alpha = x + y,$

donc $\qquad \frac{d\alpha}{dx} = 1, \quad \frac{d\alpha}{dy} = 1.$

Ces valeurs étant substituées, on aura

$$1 = \frac{f'y.\varphi' x + fy.\varphi'' x}{\varphi' x.f'y + \varphi x.f''y},$$

ou bien $\qquad \varphi x.f''y - fy.\varphi'' x = 0.$

Faisant y constant on trouvera

$$\varphi x = a.\sin(bx + c),$$

et si l'on fait x constant

$$fy = a'.\sin(by + c').$$

On tire de là

$$\varphi' x = ab.\cos(bx + c), \quad \varphi'' x = -ab^2.\sin(bx + c)$$

$$f'y = a'b.\cos(by + c'), \quad f''y = -a'b_1^2.\sin(by + c').$$

Ces valeurs étant substituées dans la proposée, on obtiendra

$$\psi(x+y) = aa'b(\sin(bx + c).\cos(by + c') + \sin(by + c').\cos(bx + c))$$

$$= aa'b.\sin(b(x+y) + c + c').$$

Les trois fonctions cherchées sont donc

$$\varphi x = a.\sin(bx + c)$$

$$fy = a'.\sin(by + c')$$

$$\psi\alpha = aa'b.\sin(b\alpha + c + c').$$

Si l'on fait $\qquad a = a' = b = 1$ et $c = c' = 0$, on aura

$\varphi x = \sin x$, $fy = \sin y$, $\psi\alpha = \sin\alpha$, et par suite

$$\sin(x+y) = \sin x . \sin' y + \sin y . \sin' x.$$

Trouver les trois fonctions qui sont déterminées par l'équation

$$\psi(x+y) = f(xy) + \varphi(x-y).$$

Différentiant par rapport à x en supposant $x+y$ constant, on aura

$$0 = f'(xy) . (y-x) + 2\varphi'(x-y).$$

Maintenant pour trouver φ, soit $xy = c$ et $x - y = \alpha$, on aura

$$\varphi'\alpha = k . \alpha$$

donc
$$\varphi\alpha = k' + \frac{k}{2} . \alpha^2.$$

Pour trouver f, soit $xy = \beta$ et $x - y = c$, on aura

$$f'\beta = c'$$

donc
$$f\beta = c'' + c'\beta.$$

Ces valeurs de $\varphi\alpha$ et $f\beta$ étant substituées dans l'équation donnée, on obtiendra

$$\psi(x+y) = c'' + c'xy + k' + \frac{k}{2}(x-y)^2.$$

Pour déterminer ψ, soit $x + y = \alpha$, d'où l'on tire $y = \alpha - x$; donc

$$\psi\alpha = c'' + c'x(\alpha - x) + k' + \frac{k}{2}(2x-\alpha)^2 = c'' + \frac{k}{2}\alpha^2 + k' + x\alpha(c'-2k) + (2k-c')x^2.$$

Pour que cette équation soit possible, il faut que x s'évanouisse; donc on aura

$$2k - c' = 0, \text{ et } c' = 2k.$$

Cette valeur étant substituée donne

$$\psi\alpha = k' + c'' + \frac{k}{2}\alpha^2,$$

$$f\beta = c'' + 2k\beta,$$

$$\varphi\gamma = k' + \frac{k}{2} . \gamma^2,$$

qui sont les trois fonctions cherchées.

Comme dernier exemple je prendrai le suivant:

Déterminer les fonctions φ et f par l'équation

$$\varphi(x+y) = \varphi x . fy + fx . \varphi y.$$

En supposant $x + y = c$, et en différentiant, on obtiendra

$$0 = \varphi' x . fy - \varphi x . f'y + f'x . \varphi y - fx . \varphi' y.$$

Supposons de plus que $f(0) = 1$, et $\varphi(0) = 0$, et nous aurons en posant $y = 0$:

$$0 = \varphi' x - \varphi x . c + fx . c';$$

donc
$$fx = k\varphi x + k'\varphi' x.$$

Substituant cette valeur de fx et faisant y constant, on aura

$$\varphi''x + a\varphi'x + b\varphi x = 0,$$

et en intégrant

$$\varphi x = c'.e^{\alpha x} + c''.e^{\alpha' x}.$$

Connaissant φx on connaît aussi fx, et en substituant les valeurs de ces fonctions, on pourra déterminer les valeurs des quantités constantes. On peut supposer

$$c' = -c'' = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \text{ et } \alpha = -\alpha' = \sqrt{-1},$$

ce qui donnera

$$\varphi x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \sin x$$

et

$$fx = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} = \cos x.$$

XVIII.

Résolution de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies.

1.

La valeur de l'expression $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})$.

Lorsque φ est une fonction algébrique, logarithmique, exponentielle ou circulaire, on peut, comme on sait, toujours exprimer la valeur réelle de $\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-\sqrt{-1})$ sous forme réelle et finie. Si au contraire φ conserve sa généralité, on n'a pas que je sache, jusqu'à présent pu l'exprimer sous forme réelle et finie. On peut le faire à l'aide d'intégrales définies de la manière suivante.

Si on développe $\varphi(x+y\sqrt{-1})$ et $\varphi(x-y\sqrt{-1})$ d'après le théorème de *Taylor*, on obtient

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})=\varphi x+\varphi' x.y\sqrt{-1}-\frac{\varphi'' x}{1.2}.y^2-\frac{\varphi''' x}{1.2.3}.y^3\sqrt{-1}+\frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4}.y^4-\ldots$$

$$\varphi(x-y\sqrt{-1})=\varphi x-\varphi' x.y\sqrt{-1}-\frac{\varphi'' x}{1.2}.y^2+\frac{\varphi''' x}{1.2.3}.y^3\sqrt{-1}+\frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4}.y^4-\ldots$$

donc

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})=2\left(\varphi x-\frac{\varphi'' x}{1.2}.y^2+\frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4}.y^4-\ldots\right).$$

Pour trouver la somme de cette série, considérons la série

$$\varphi(x+t)=\varphi x+t.\varphi' x+\frac{t^2}{2}.\varphi'' x+\frac{t^3}{2.3}.\varphi''' x+\ldots$$

En multipliant les deux membres de cette équation par $e^{-v^2t^2}$, et prenant ensuite l'intégrale depuis $t=-\infty$ jusqu'à $t=+\infty$, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t).e^{-v^2t^2}.dt=\varphi x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.dt+\varphi' x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.tdt+\tfrac{1}{2}\varphi'' x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^2dt+\cdots$$

Or $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^{2n+1}.dt=0;$$ donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t).e^{-v^2t^2}.dt=\varphi x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.dt+\frac{\varphi''x}{1.2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^2.dt+\frac{\varphi''''x}{1.2.3.4}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^4.dt+\cdots$$

Considérons l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^{2n}.dt.$$

Soit $t=\frac{\alpha}{v}$, on a $e^{-v^2t^2}=e^{-\alpha^2}$, $t^{2n}=\frac{\alpha^{2n}}{v^{2n}}$, $dt=\frac{d\alpha}{v}$;

donc

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^{2n}.dt=\frac{1}{v^{2n+1}}\cdot\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2}.\alpha^{2n}.d\alpha=\frac{\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right)}{v^{2n+1}};$$

c'est-à-dire

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2t^2}.t^{2n}.dt=\frac{1.3.5\ldots(2n-1)\sqrt{\pi}}{2^n.v^{2n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{v^{2n+1}}\cdot A_n.$$

Cette valeur étant substituée ci-dessus, donne

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t).e^{-v^2t^2}.dt=\frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(\varphi x+\frac{A_1}{2}\cdot\frac{\varphi''x}{v^2}+\frac{A_2}{2.3.4}\cdot\frac{\varphi''''x}{v^4}+\ldots\right).$$

En multipliant par $e^{-v^2y^2}.vdv$, et prenant l'intégrale depuis $v=-\infty$ jusqu'à $v=\infty$, on obtiendra

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}vdv.e^{-v^2y^2}.\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)e^{-v^2t^2}.dt=\varphi x\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2y^2}.dv+\frac{A_1\varphi''x}{2}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2y^2}\frac{dv}{v^2}+\cdots$$

Soit $vy=\beta$, on a $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2y^2}.v^{-2n}.dv=y^{2n-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}.\beta^{-2n}.d\beta.$

Or $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\beta^2}.\beta^{-2n}.d\beta=\Gamma\left(\frac{1-2n}{2}\right)=\frac{(-1)^n.2^n.\sqrt{\pi}}{1.3.5\ldots(2n-1)}=\frac{(-1)^n.\sqrt{\pi}}{A_n}$;

donc $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2y^2}.v^{-2n}.dv=\frac{(-1)^n.\sqrt{\pi}.y^{2n-1}}{A_n}$; et par suite

$$A_n\int_{-\infty}^{\infty}e^{-v^2y^2}.v^{-2n}.dv=(-1)^n.y^{2n-1}.\sqrt{\pi}.$$

En substituant cette valeur, et divisant par $\frac{\sqrt{\pi}}{2y}$, on obtiendra

$$\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}vdv.e^{-v^2y^2}.\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t).e^{-v^2t^2}.dt=2\left(\varphi x-\frac{\varphi''x}{2}.y^2+\frac{\varphi''''x}{2.3.4}.y^4-\ldots\right).$$

Le second membre de cette équation est égal à

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1});$$

donc

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1})=\frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}vdv.e^{-v^2y^2}.\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t).e^{-v^2t^2}.dt.$$

Posant $x = 0$, on a

$$\varphi(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) = \frac{2y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} vdv.e^{-v^2y^2}.\int_{-\infty}^{\infty}\varphi t.e^{-v^2t^2}.dt.$$

Soit par exemple $\varphi t = e^t$, on aura

$$\varphi(y\sqrt{-1}) + \varphi(-y\sqrt{-1}) = e^{y\sqrt{-1}} + e^{-y\sqrt{-1}} = 2\cos y;$$

donc $$\cos y = \frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} vdve^{-v^2y^2}.\int_{-\infty}^{\infty}e^{t-v^2t^2}.dt;$$

or $$\int_{-\infty}^{\infty}e^{t-v^2t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}.e^{\frac{1}{4v^2}};$$

donc $$\cos y = \frac{y}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dv.e^{-v^2y^2+\frac{1}{4v^2}}.$$

Si l'on fait $v = \frac{t}{y}$, on aura

$$\cos y = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}dt.e^{-t^2+\frac{1}{4}\frac{y^2}{t^2}}.$$

En donnant d'autres valeurs à φt on en peut déduire la valeur d'autres intégrales définies, mais comme mon but était seulement de déterminer la valeur de $\varphi(x+\sqrt{-1}) + \varphi(x-y\sqrt{-1})$ je ne m'en occuperai pas.

Je remarquerai à la fin que de la même manière que de l'équation

$$\psi(a) = \int_0^a \frac{ds}{(a-x)^n} \text{ (voy. Tome I. pag. 27)}$$

j'ai trouvé s, ainsi de l'équation

$$\psi(a) = \int_0^a \varphi(xa).fx.dx$$

j'ai trouvé la fonction φ, où ψ et f sont des fonctions données, l'intégrale étant prise entre des limites quelconques, mais la solution de ce problème est trop longue pour être donnée ici.

2.

Les nombres de Bernoulli exprimés par des intégrales définies, d'où l'on a ensuite déduit l'expression de l'intégrale finie $\Sigma\varphi x$.

Si l'on développe la fonction $1 - \frac{u}{2}.\cot\frac{u}{2}$ en série suivant les puissances entières de u, en posant

$$1 - \frac{u}{2}.\cot\frac{u}{2} = A_1.\frac{u^2}{2} + A_2.\frac{u^4}{2.3.4} + \dots + A_n\frac{u^{2n}}{2.3.4..2n} + \dots$$

les coefficiens A_1, A_2, A_3 etc. sont, comme on sait, les nombres de *Bernoulli*. (Voyez Euleri Institutiones calc. diff. pag. 426).

On a

$$1-\frac{u}{2}.\cot\frac{u}{2}=2u^2.\left(\frac{1}{4\pi^2-u^2}+\frac{1}{4.4\pi^2-u^2}+\frac{1}{9.4\pi^2-u^2}+\frac{1}{16.4\pi^2-u^2}+\ldots\right);$$

(Voy. Euleri institut. calc. diff. pag. 425.)

et en développant le second membre en série:

$$1-\frac{u}{2}.\cot\frac{u}{2}=\frac{u^2}{2.\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots\right)$$
$$+\frac{u^4}{2^3.\pi^4}\left(1+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\ldots\right)$$
$$+\frac{u^6}{2^5.\pi^6}\left(1+\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}+\ldots\right)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$+\frac{u^{2n}}{2^{2n-1}.\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right).$$

En comparant ce développement au précédent, on aura

$$\frac{A_n}{1.2.3\ldots 2n}=\frac{1}{2^{2n-1}.\pi^{2n}}\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right).$$

Considérons maintenant l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^{2n-1}.dt}{e^t-1}$.

On a $\qquad \frac{1}{e^t-1}=e^{-t}+e^{-2t}+e^{-3t}+\ldots$; donc

$$\int\frac{t^{2n-1}.dt}{e^t-1}=\int e^{-t}.t^{2n-1}.dt+\int e^{-2t}.t^{2n-1}.dt+\ldots+\int e^{-kt}.t^{2n-1}.dt+\ldots$$

Or $\qquad \int_0^{\frac{1}{0}}e^{-kt}.t^{2n-1}.dt=\frac{\Gamma(2n)}{k^{2n}}$.

Cette expression se déduit de l'équation $\Gamma(a)=\int_0^1 dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1}$ en y faisant $a=2n$ et $x=e^{-kt}$.

Donc $\qquad \int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^{2n-1}.dt}{e^t-1}=\Gamma(2n)\left(1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots\right);$

mais d'après ce qui précède, on a

$$1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\ldots=\frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{1.2.3\ldots 2n}.A_n=\frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{\Gamma(2n+1)}.A_n;$$

donc $\qquad \int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^{2n-1}.dt}{e^t-1}=\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(2n+1)}.2^{2n-1}.\pi^{2n}.A_n=\frac{2^{2n-1}.\pi^{2n}}{2n}.A_n;$

et par conséquent

$$A_n=\frac{2n}{2^{2n-1}.\pi^{2n}}.\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{t^{2n-1}.dt}{e^t-1}.$$

En mettant $t\pi$ au lieu de t, on obtiendra enfin

$$A_n = \frac{2n}{2^{2n-1}} \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1} \cdot dt}{e^{\pi t} - 1}.$$

Ainsi les nombres de *Bernoulli* peuvent être exprimés d'une manière très simple par des intégrales définies.

De l'autre côté on voit aussi, lorsque n est un nombre entier, que l'expression $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2n-1} \cdot dt}{e^{\pi t} - 1}$ est toujours rationnelle et égale à $\frac{2^{2n-1}}{2n} \cdot A_n$, ce qui est assez remarquable. Ainsi on aura par exemple en faisant $n = 1, 2, 3$ etc.

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t} - 1} = \tfrac{1}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3 dt}{e^{\pi t} - 1} = \tfrac{1}{30} \cdot \tfrac{2^3}{4} = \tfrac{1}{15}$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^5 dt}{e^{\pi t} - 1} = \tfrac{1}{42} \cdot \tfrac{2^5}{6} = \tfrac{8}{63}$$

etc.

Maintenant à l'aide de ce qui précède, on pourra très facilement exprimer la fonction $\Sigma \varphi x$ par une intégrale définie.

On a

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x \,.\, dx - \tfrac{1}{2} \varphi x + A_1 \cdot \frac{\varphi' x}{1.2} - A_2 \cdot \frac{\varphi''' x}{1.2.3.4} + A_3 \cdot \frac{\varphi^{\text{v}} x}{1.2.3.5.6} - \dots$$

En substituant les valeurs de A_1, A_2, A_3, etc. on aura

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2} \varphi x + \frac{\varphi' x}{1.2} \cdot \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t\,dt}{e^{\pi t} - 1} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3.2^3} \cdot \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^3 dt}{e^{\pi t} - 1} + \frac{\varphi^{\text{v}} x}{1.2.3.4.5.2^5} \cdot \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^5 dt}{e^{\pi t} - 1} \dots$$

c'est-à-dire

$$\Sigma \varphi x = \int \varphi x . dx - \tfrac{1}{2} \varphi x + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{\pi t} - 1} \left(\varphi' x \cdot \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3.} \cdot \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{\text{v}} x}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{t^5}{2^5} + \dots \right).$$

Or

$$\varphi\left(x + \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{\varphi'' x}{1.2} \cdot \frac{t^2}{2^2} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} \cdot \frac{t^4}{2^4} - \dots$$
$$+ \sqrt{-1}\left(\varphi' x \cdot \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3} \cdot \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{\text{v}} x}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{t^5}{2^5} + \dots \right)$$

$$\varphi\left(x - \frac{t}{2}\sqrt{-1}\right) = \varphi x - \frac{\varphi'' x}{1.2} \cdot \frac{t^2}{2^2} + \frac{\varphi'''' x}{1.2.3.4} \cdot \frac{t^4}{2^4} - \dots$$
$$- \sqrt{-1}\left(\varphi' x \cdot \frac{t}{2} - \frac{\varphi''' x}{1.2.3} \cdot \frac{t^3}{2^3} + \frac{\varphi^{\text{v}} x}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{t^5}{2^5} - \dots \right).$$

On tire de là

$$\varphi' x.\frac{t}{2}-\frac{\varphi''' x}{1.2.3}\cdot\frac{t^3}{2^3}+\frac{\varphi^{\text{v}} x}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{t^5}{2^5}-\ldots=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)\right].$$

Cette valeur étant substituée dans l'expression de $\Sigma\varphi x$, donne

$$\Sigma\varphi x=\int\varphi x.dx-\tfrac{1}{2}\varphi x+\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-1}\cdot\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}.$$

Cette expression de l'intégrale finie d'une fonction quelconque me parait très remarquable, et je ne crois pas qu'elle ait été trouvée auparavant.

De l'équation précédente on tire

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt}{e^{\pi t}-1}\cdot\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}=\Sigma\varphi x-\int\varphi x.dx+\tfrac{1}{2}\varphi x.$$

On a ainsi l'expression d'une intégrale définie très générale. Je vais faire voir l'application à quelques cas particuliers.

1. Soit $\varphi x=e^x$.

Dans ce cas on a

$$\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)=e^x.e^{\frac{t}{2}\sqrt{-1}}=e^x\left(\cos\frac{t}{2}+\sqrt{-1}.\sin\frac{t}{2}\right);$$

donc

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}}=e^x.\sin\frac{t}{2};$$

et par conséquent

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin\frac{t}{2}}{e^{\pi t}-1}=e^{-x}.\Sigma e^x-e^{-x}\int e^x dx+\tfrac{1}{2};$$

mais

$$\Sigma e^x=\frac{e^x}{e-1}\text{ et }\int e^x dx=e^x;\text{ donc}$$

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin\frac{t}{2}}{e^{\pi t}-1}=\frac{1}{e-1}-\tfrac{1}{2}.$$

Si l'on fait $\varphi x=e^{mx}$, on obtiendra de la même manière

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin\frac{mt}{2}}{e^{\pi t}-1}=\frac{1}{e^m-1}-\frac{1}{m}+\tfrac{1}{2}.$$

Si l'on met $2t$ à la place de t, on aura

$$\int_0^{\frac{1}{0}}\frac{dt.\sin mt}{e^{2\pi t}-1}=\tfrac{1}{4}.\frac{e^m+1}{e^m-1}-\frac{1}{2m},$$

formule trouvée d'une autre manière par Mr. *Legendre* (Exerc. de calc. int. T. II. p. 189.)

2. Soit $\varphi x = \frac{1}{x}$, on trouvera

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = -\frac{t}{2(x^2+\frac{1}{4}t^2)},$$

et
$$\int \varphi x . dx = \int \frac{dx}{x} = \log x + C;$$

donc
$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t.dt}{(x^2+\frac{1}{4}t^2)(e^{\pi t}-1)} = 2 \log x - \frac{1}{x} - 2\Sigma\left(\frac{1}{x}\right) + C.$$

On détermine C en posant $x = 1$, ce qui donne

$$C = 3 + \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t.dt}{(1+\frac{1}{4}t^2)(e^{\pi t}-1)}.$$

3. Soit $\varphi x = \sin ax$, on aura

$$\frac{\varphi\left(x+\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)-\varphi\left(x-\frac{t}{2}\sqrt{-1}\right)}{2\sqrt{-1}} = \frac{\cos ax}{2}\left(e^{\frac{at}{2}} - e^{-\frac{at}{2}}\right),$$

$$\Sigma \sin ax = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a}, \quad \int \sin ax.dx = -\frac{1}{a}.\cos ax;$$

donc

$$\frac{\cos ax}{2}\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{\frac{at}{2}}-e^{-\frac{at}{2}}}{e^{\pi t}-1}.dt = -\frac{\cos(ax-\frac{1}{2}a)}{2\sin\frac{1}{2}a} + \frac{1}{a}.\cos ax + \frac{1}{2}\sin ax,$$

et en écrivant $2a$ au lieu de a, et réduisant

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{e^{-at}-e^{at}}{e^{\pi t}-1} = \cot a - \frac{1}{a}.$$

En supposant d'autres formes pour la fonction φx on pourra de la même manière trouver la valeur d'autres intégrales définies.

XIX.

Sur l'équation différentielle $dy = (p + qy + ry^2).dx = 0$, où p, q, et r sont des fonctions de x seul.

On peut toujours réduire l'équation $dy = (p + qy + ry^2)dx = 0$, à une autre de la forme

$$dy = (P + Qy^2)dx = 0.$$

Première méthode. Soit $y = z + r'$, on aura

$$dz + dr' + (p + qr' + r'^2 r)dx + z(q + 2rr')dx + rz^2 dx = 0.$$

Pour que le terme multiplié par z disparaisse, il faut poser $q + 2rr' = 0$, d'où l'on tire $r' = -\frac{q}{2r}$. Cette valeur étant substituée pour r', donne

$$dz + \left(p - \frac{q^2}{4r} - \frac{dq}{dx} \cdot \frac{1}{2r} + \frac{dr}{dx} \cdot \frac{q}{2r^2} + rz^2\right)dx = 0; \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

donc

$$dz + (P + Qz^2)dx = 0$$

où

$$P = p - \frac{q^2}{4r} - \frac{dq}{dx} \cdot \frac{1}{2r} + \frac{dr}{dx} \cdot \frac{q}{2r^2} \text{ et } Q = r.$$

Seconde méthode. Soit $y = zr'$, et par conséquent $dy = r'dz + zdr'$, on aura

$$r'dz + pdx + z(dr' + r'qdx) + z^2 r'^2 rdx = 0.$$

Pour que z s'évanouisse, on fera $dr' + r'qdx = 0$, d'où l'on tire

$$r' = e^{-\int q dx}.$$

En substituant cette valeur pour r' on aura

$$dz + \left(p.e^{\int q dx} + r.e^{-\int q dx}.z^2\right)dx = 0. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Si donc on peut résoudre les équations (1) ou (2), on peut aussi résoudre la proposée, et réciproquement.

L'équation (2) est résoluble dans le cas où l'on a

$$p.e^{\int q dx} = ar.e^{-\int q dx};$$

car on a alors

$$\frac{dz}{a + z^2} = -\frac{p}{a}.e^{\int q dx}.dx;$$

donc $$\text{arc tang}\left(\frac{z}{\sqrt{a}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{a}}\int pdx . e^{\int qdx};$$

et de là $$z = -\sqrt{a}.\text{tang}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}.\int pdx . e^{\int qdx}\right);$$

mais $$y = zr' = z . e^{-\int qdx};$$

donc $$y = -\sqrt{a}.e^{-\int qdx}.\text{tang}\left(\frac{1}{\sqrt{a}}.\int e^{\int qdx}.pdx\right);$$

maintenant

$$pe^{\int qdx} = ar . e^{-\int qdx}; \text{ donc } e^{2\int qdx} = \frac{ar}{p}, \; e^{\int qdx} = \sqrt{\left(\frac{ar}{p}\right)},$$

$$\int qdx = \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{ar}{p}\right), \; qdx = \tfrac{1}{2}\frac{dr}{r} - \tfrac{1}{2}\frac{dp}{p}, \quad q = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\cdot\frac{dr}{dx} - \frac{1}{p}\cdot\frac{dp}{dx}\right).$$

L'équation $$dy + (p + qy + ry^2)dx = 0,$$

deviendra donc

$$dy + \left[p + \tfrac{1}{2}\left(\frac{dr}{rdx} - \frac{dp}{pdx}\right)y + ry^2\right]dx = 0,$$

et son intégrale

$$y = -\sqrt{\frac{p}{r}}.\text{tang}(\int\sqrt{(rp)}.dx;$$

où bien, en mettant pour la tangente son expression exponentielle:

$$y = \sqrt{\left(-\frac{p}{r}\right)}\cdot\left\{\frac{1 - e^{2\int dx\sqrt{(-pr)}}}{1 + e^{2\int dx\sqrt{(-pr)}}}\right\}.$$

Soit par exemple $p = -r = \frac{1}{x}$, on aura

$$dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y^2}{x}\right)dx = 0,$$

et $$y = \frac{1 - e^{2\int\frac{dx}{x}}}{1 + e^{2\int\frac{dx}{x}}} = \frac{1 - cx^2}{1 + cx^2}.$$

En supposant $p = x^m$ et $r = x^n$, on aura $\frac{dr}{rdx} = \frac{n}{x}$ et $\frac{dp}{pdx} = \frac{m}{x}$,

$$\sqrt{\frac{p}{r}} = x^{\frac{m-n}{2}}, \; \int dx\sqrt{(pr)} = \int x^{\frac{m+n}{2}}.dx = c + \frac{2}{m+n+2}.x^{\frac{1}{2}(m+n+2)};$$

donc $$dy + \left(x^m + \tfrac{1}{2}(n - m).\frac{y}{x} + x^n.y^2\right)dx = 0,$$

et $$y = -x^{\frac{m-n}{2}}.\text{tang}\left(c + \frac{2}{m+n+2}.x^{\frac{1}{2}(m+n+2)}\right).$$

Soit $n = -m-2$, on aura

$$dy + \left(x^m - (m+1)\frac{y}{x} + \frac{y^2}{x^{m+2}}\right)dx = 0,$$

$$y = -x^{m+1}.\mathrm{tang}(k + \log x) = -x^{m+1}.\mathrm{tang}(\log(k'x)),$$

d'où l'on tire

$$k'x = e^{-\mathrm{arc\,tang}(y\,.\,x^{-m-1})}.$$

Si dans l'équation (2) on met $-\frac{1}{z}$ à la place de z, on aura

$$dz + (r.e^{-\int q dx} + p.e^{\int q dx}.z^2)dx = 0,$$

et lorsque

$$y = -\frac{1}{z}.e^{-\int q dx}, \text{ on a}$$

$$dy + (p + qy + ry^2)dx = 0.$$

Lorsque $p = 0$, on a $dy + (qy + ry^2)dx = 0$,

$$dz = -r.e^{-\int q dx}.dx, \; z = -\int r.e^{-\int q dx}.dx$$

et

$$y = \frac{1}{e^{\int q dx}.\int e^{-\int q dx}.r.dx}.$$

Telle est donc l'intégrale de l'équation

$$dy + (qy + ry^2)dx = 0.$$

Si dans l'équation proposée on fait $\frac{p}{c} = \frac{q}{2a} = r$, on obtient

$$cdy + (c + 2ay + y^2)pdx = 0,$$

donc

$$\int \frac{cdy}{c + 2ay + y^2} = -\int pdx,$$

or

$$\frac{dy}{y^2 + 2ay + c} = \frac{1}{2\sqrt{(a^2-c)}}\left(\frac{dy}{y + a - \sqrt{(a^2-c)}} - \frac{dy}{y + a + \sqrt{(a^2-c)}}\right);$$

donc

$$-\int pdx = \frac{c}{2\sqrt{(a^2-c)}}\left[\log\left(y + a - \sqrt{(a^2-c)}\right) - \log\left(y + a + \sqrt{(a^2-c)}\right)\right],$$

ou bien

$$-\int pdx = \log\left(\frac{y + a - \sqrt{(a^2-c)}}{y + a + \sqrt{(a^2-c)}}\right)^{\frac{c}{2\sqrt{(a^2-c)}}},$$

et de là

$$\frac{y + a - \sqrt{(a^2-c)}}{y + a + \sqrt{(a^2-c)}} = e^{-2\sqrt{(a^2-c)}.\int pdx},$$

et

$$y = -a + \sqrt{(a^2-c)}.\frac{1 + e^{-2\sqrt{(a^2-c)}.\int pdx}}{1 - e^{-2\sqrt{(a^2-c)}.\int pdx}}.$$

Dans ce cas, l'équation (2) devient

$$cdz + \left(ce^{\frac{2a}{c}\cdot\int pdx} + e^{-\frac{2a}{c}\cdot\int pdx}\cdot z^2\right)pdx = 0;$$

mais on a

$$z = \frac{y}{r'} = y\cdot e^{\int qdx} = y\cdot e^{\frac{2a}{c}\int pdx};$$

donc on aura

$$z = e^{\frac{2a}{c}\int pdx}\cdot\left\{-a + \sqrt{(a^2 - c)}\cdot\frac{1 + e^{-2\sqrt{(a^2-c)}\cdot\int pdx}}{1 - e^{-2\sqrt{(a^2-c)}\cdot\int pdx}}\right\}.$$

Si l'on fait $p = 1$, ce qui ne diminue pas la généralité, on a $\int pdx = x + k$, et par là

$$cdz + \left(c.e^{\frac{2a}{c}(x+k)} + e^{-\frac{2a}{c}(x+k)}\cdot z^2\right)dx = 0;$$

$$z = e^{\frac{2a}{c}(x+k)}\cdot\left\{-a + \sqrt{(a^2 - c)}\cdot\frac{1 + e^{-2(x+k)\sqrt{(a^2-c)}}}{1 - e^{-2(x+k)\sqrt{(a^2-c)}}}\right\}.$$

Lorsqu'on connait une valeur de y qui satisfait à l'équation

$$dy + (p + qy + ry^2)dx = 0$$

on pourra aisément trouver l'intégrale complète.

Soit y' cette valeur particulière. On fera $y = y' + z$ et on aura

$$dz + dy' + (p + qy' + ry'^2)dx + \left(z(q + 2ry') + rz^2\right)dx = 0.$$

Or par l'hypothèse on a $dy' + (p + qy' + ry'^2)dx = 0$; donc

$$dz + \left((q + 2ry')z + rz^2\right)dx = 0,$$

d'où l'on tire en intégrant

$$z = \frac{1}{e^{\int(q+2ry')dx}\cdot\int e^{-\int(q+2ry')dx}\cdot rdx};$$

mais $y = z + y'$; donc

$$y = y' + \frac{e^{-\int(q+2ry')dx}}{\int e^{-\int(q+2ry')dx}\cdot rdx}.$$

Soit par exemple

$$dy + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{ay}{x} + cy^2\right)dx = 0.$$

Faisant $y = \frac{b}{x}$ on trouvera

$$-b + 1 + ab + cb^2 = 0,$$

et de là

$$b = -\frac{a-1}{2c} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{a-1}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}\right]};$$

donc $y' = \left\{\frac{1-a}{2c} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}\right]}\right\} \cdot \frac{1}{x}$ est une intégrale particulière, et comme on a $q = \frac{a}{x}$, $r = c$, l'intégrale complète de l'équation proposée est

$$y = \left\{\frac{1-a}{2c} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}\right]}\right\} \cdot \frac{1}{x} + \frac{e^{-\{1 \pm \sqrt{[(1-a)^2-4c]}\} \cdot \int \frac{dx}{x}}}{c \cdot \int dx \cdot e^{-\{1 \pm \sqrt{[(1-a)^2-4c]}\} \cdot \int \frac{dx}{x}}},$$

et en effectuant les intégrations

$$y = \left\{\frac{1-a}{2c} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{1-a}{2c}\right)^2 - \frac{1}{c}\right]}\right\} \cdot \frac{1}{x} + \frac{k \cdot x^{-\{1 \pm \sqrt{[(1-a)^2-4c]}\}}}{C \pm \frac{ck}{\sqrt{[(1-a)^2-4c]}} \cdot x^{\mp \sqrt{[(1-a)^2-4c]}}},$$

où k et C sont les constantes arbitraires dues aux intégrations.

Quoiqu'on puisse, comme on vient de voir, résoudre plusieurs cas en employant des substitutions convenables, il semble pourtant plus commode pour l'intégration des équations différentielles de chercher le facteur par lequel l'équation doit être multipliée pour devenir intégrable.

Soit z ce facteur, de sorte que l'équation

$$zdy + z(p + qy^2)dx = 0$$

soit une différentielle complète. On doit avoir, comme on sait,

$$\frac{dz}{dx} = \frac{d[z(p+qy^2)]}{dy},$$

et en effectuant la différentiation

$$\frac{dz}{dx} = (p + qy^2) \cdot \frac{dz}{dy} + 2qy \cdot z.$$

Soit $z = e^r$, on aura

$$\frac{dr}{dx} = (p + qy^2) \cdot \frac{dr}{dy} + 2qy.$$

Qvoique cette équation en général ne soit pas moins difficile à résoudre que la proposée, elle peut néanmoins servir à découvrir plusieurs cas particuliers dans lesquels celle-ci est résoluble.

Supposons par exemple que $r = a.\log(\alpha + \beta y)$, où a est une quantité constante, et α et β des fonctions de x seul. En substituant cette valeur de r on obtiendra

$$\frac{a\alpha' + a\beta' y}{\alpha + \beta y} - \frac{a\beta(p + qy^2)}{\alpha + \beta y} - 2qy = 0,$$

où $\alpha' = \frac{d\alpha}{dx}$ et $\beta' = \frac{d\beta}{dx}$. En multipliant par $\alpha + \beta y$ on aura

$$a\alpha' - a\beta p + (a\beta' - 2\alpha q)y - (a\beta q + 2\beta q)y^2 = 0,$$

et par là

$$a\alpha' - a\beta p = 0,\ a\beta' - 2\alpha q = 0,\ a\beta q + 2\beta q = 0.$$

La dernière équation donne $a = -2$, et en substituant cette valeur dans les deux autres équations, on obtiendra

$$\alpha' - \beta p = 0,\ \beta' + \alpha q = 0.$$

Si de ces deux équations on tirait α et β en p et q, on parviendrait, à une équation différentielle du second ordre; mais on trouve $p = \frac{\alpha'}{\beta}$ et $q = -\frac{\beta'}{\alpha}$; si donc ces deux conditions ont lieu, on a $r = -2\log(\alpha + \beta y)$, et par suite $z = e^r = \frac{1}{(\alpha + \beta y)^2}$.

Il suit de là que l'équation différentielle

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha}.y^2\right)dx = 0$$

peut être intégrée, et que le facteur qui la rend intégrable, est $\frac{1}{(\alpha + \beta y)^2}$.

L'intégrale sera donc

$$\int \frac{dy}{(\alpha + \beta y)^2} + fx = 0,$$

c'est-à-dire

$$fx - \frac{1}{\beta(\alpha + \beta y)} = 0.$$

Pour trouver fx, il faut différentier, ce qui donnera

$$\left(f'x + \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta' + 2\beta\beta' y}{\beta^2(\alpha + \beta y)^2}\right)dx + \frac{dy}{(\alpha + \beta y)^2} = 0,$$

mais

$$dy = -\frac{(\alpha\alpha' - \beta\beta'.y^2)}{\alpha\beta}.dx;$$

donc

$$f'x + \frac{\alpha'\beta + \alpha\beta' + 2\beta\beta' y}{\beta^2(\alpha + \beta y)^2} - \frac{\alpha\alpha' - \beta\beta' y^2}{\alpha\beta(\alpha + \beta y)^2} = 0,$$

d'où en réduisant

$$f'x = -\frac{\beta'}{\alpha\beta^2} \text{ et } fx = -\int \frac{\beta'}{\alpha\beta^2}.dx.$$

L'intégrale de l'équation

$$dy + \left(\frac{\alpha'}{\beta} - \frac{\beta'}{\alpha}y^2\right)dx = 0$$

sera donc

$$\frac{1}{\beta(\alpha+\beta y)}+\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}\,.\,dx=0,$$

d'où l'on tire

$$y=-\frac{\alpha}{\beta}+\frac{1}{\beta^2\left(C-\int\frac{\beta'}{\alpha\beta^2}\,dx\right)}.$$

Supposons $\beta'=\alpha=\frac{dp}{dx}$, on aura

$$dy+\left(\frac{d^2p}{p\,.\,dx^2}-y^2\right)dx=0,$$

$$y=-\frac{dp}{pdx}+\frac{1}{p^2\left(C-\int\frac{dx}{p^2}\right)}.$$

Voy. memorie della società Italiana T. III p. 236.

XX.

Sur l'équation différentielle $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx=0$.

Cette équation peut toujours être réduite à la forme

$$zdz+(P+Qz)dx=0.$$

Pour cet effet je pose $y=\alpha+\beta z$;
donc $dy=d\alpha+\beta dz+zd\beta$; donc en substituant:

$$(\alpha+s+\beta z)(d\alpha+zd\beta+\beta dz)+(p+q\alpha+q\beta z+r\alpha^2+2r\alpha\beta z+r\beta^2z^2)dx=0,$$

ou bien

$$\left(z+\frac{\alpha+s}{\beta}\right)dz+\frac{(s+\alpha)d\alpha+(p+q\alpha+r\alpha^2)dx}{\beta^2}$$

$$+z.\left(\frac{(\alpha+s)d\beta+\beta[d\alpha+(q+2r\alpha)dx]}{\beta^2}\right)+\left(rdx+\frac{d\beta}{\beta}\right).z^2=0.$$

Pour que cette équation soit de la forme $zdz+(P+Qz)dx=0$, on doit avoir les deux équations suivantes:

$$\frac{\alpha+s}{\beta}=0 \text{ et } rdx+\frac{d\beta}{\beta}=0,$$

donc

$$\alpha=-s \text{ et } \beta=e^{-\int rdx},$$

$$P=(p-qs+rs^2).e^{2\int rdx},\ Q=((q-2rs)dx-ds).e^{\int rdx}.$$

Si donc dans l'équation $(y+s)dy+(p+qy+ry^2)dx=0$, au lieu de y on met $\alpha+\beta z=-s+z.e^{-\int rdx}$, on obtient

$$zdz+\left[(p-qs+rs^2).e^{2\int rdx}+\left(q-2rs-\frac{ds}{dx}\right).e^{\int rdx}.z\right]dx=0.$$

Donc, si cette équation est résoluble, celle-là l'est de même. Cela a lieu si

$$p-qs+rs^2=0,$$

ou bien si

$$q-2rs-\frac{ds}{dx}=0.$$

Dans le premier cas on a

$dz + \left(q - 2rs - \frac{ds}{dx}\right).e^{\int rdx}.dx = 0$, d'où $z = \int\left(2rs + \frac{ds}{dx} - q\right).e^{\int rdx}.dx$;

et dans le second cas

$zdz + (p - qs + rs^2).e^{2\int rdx}.dx = 0$, d'où $z = \sqrt{(2\int(qs - p - rs^2).e^{2\int rdx}.dx)}$.

L'équation différentielle

$$(y + s)dy + (qs - rs^2 + qy + ry^2)dx = 0$$

a donc pour intégrale

$$y = -s + e^{-\int rdx}.\int\left[\left(2rs + \frac{ds}{dx} - q\right).e^{\int rdx}\right]dx;$$

et celle-ci

$$(y + s)dy + \left[p + \left(2rs + \frac{ds}{dx}\right)y + ry^2\right]dx = 0$$

a pour intégrale

$$y = -s + e^{-\int rdx}.\sqrt{\left[2\int\left(rs^2 - p + \frac{sds}{dx}\right).e^{2\int rdx}.dx\right]}.$$

On peut aussi donner une autre forme à l'équation

$$zdz + (P + Qz)dx = 0.$$

En mettant $y + a$ au lieu de z on a

$$(y + a)(dy + da) + (P + Q(y + a)dx = 0;$$

c'est-à-dire

$$(y + a)dy + ada + Pdx + Qadx + y(Qdx + da) = 0.$$

En posant maintenant

$$Qdx + da = 0, \text{ ou } a = -\int Qdx,$$

on aura

$$(y - \int Qdx).dy + Pdx = 0,$$

et en faisant $-\int Qdx = R$ et par conséquent $Q = -\frac{dR}{dx}$,

$$(y + R)dy + Pdx = 0, \text{ d'où } dy + \frac{P}{y + R}.dx = 0.$$

Si l'on fait $Pdx = dv$, on a

$$dv + (y + f(v)).dy = 0.$$

Je vais maintenant chercher le facteur qui fasse l'équation

$$ydy + (p + qy)dx = 0$$

une différentielle complète.

Soit z ce facteur, on aura

$$\frac{d(zy)}{dx} = \frac{d[z(p + qy)]}{dy},$$

ou bien

$$y \cdot \frac{dz}{dx} - (p + qy) \frac{dz}{dy} - zq = 0.$$

Soit $z = e^r$, on aura

$$\frac{dz}{dx} = z \cdot \frac{dr}{dx} \text{ et } \frac{dz}{dy} = z \frac{dr}{dy}.$$

Donc
$$y \cdot \frac{dr}{dx} - (p + qy) \cdot \frac{dr}{dy} - q = 0.$$

Supposons $r = \alpha + \beta y$, on aura

$$y\left(\frac{d\alpha}{dx} + y \frac{d\beta}{dx}\right) - (p + qy) \cdot \beta - q = 0,$$

c'est-à-dire

$$y^2 \cdot \frac{d\beta}{dx} + y\left(\frac{d\alpha}{dx} - q\beta\right) - p\beta - q = 0.$$

On en tire

$$\frac{d\beta}{dx} = 0, \ \frac{d\alpha}{dx} - q\beta = 0, \ p\beta + q = 0,$$

et par conséquent

$$\beta = -c, \ \alpha = -c\int q dx, \ -cp + q = 0.$$

Le facteur cherché sera donc

$$e^r = e^{-c(y + \int q dx)}.$$

Soit maintenant $r = \alpha + \beta y + \gamma y^2$, on aura

$$y\left(\frac{d\alpha}{dx} + y \cdot \frac{d\beta}{dx} + y^2 \cdot \frac{d\gamma}{dx}\right) - (p + qy)(\beta + 2\gamma y) - q = 0;$$

donc en développant

$$y^3 \cdot \frac{d\gamma}{dx} + y^2\left(\frac{d\beta}{dx} - 2q\gamma\right) + y\left(\frac{d\alpha}{dx} - \beta q - 2p\gamma\right) - q - p\beta = 0.$$

On en conclut

$$\frac{d\gamma}{dx} = 0, \ \frac{d\beta}{dx} - 2q\gamma = 0, \ \frac{d\alpha}{dx} - \beta q - 2p\gamma = 0, \ q + p\beta = 0;$$

et de là

$$\gamma = c, \ \beta = 2c\int q dx, \ q + 2cp\int q dx = 0, \ \alpha = 2c\int q dx\left(\int q dx + p\right)$$
$$= 2c\int q dx \int q dx - \int \frac{q dx}{\int q dx}.$$

L'équation deviendra donc

$$y dy - \frac{q dx}{2c\int q dx} + q y dx = 0,$$

et le facteur

$$e^r, \text{ où } r = 2c\int q dx \int q dx - \int \frac{q dx}{\int q dx} + 2cy . \int q dx + cy^2.$$

Faisant $q = 1$ et écrivant $-c$ au lieu de $2c$ on a $\frac{q dx}{\int q dx} = \frac{dx}{x+a}$

et
$$y dy + \left(\frac{1}{c(x+a)} + y\right) dx = 0;$$

et le facteur deviendra

$$\frac{1}{x+a} . e^{-\frac{c}{2}(x+y+a)^2}.$$

Lorsque $a = 0$, on a $\quad y dy + \left(y + \frac{1}{cx}\right) dx = 0,$

et le facteur sera

$$\frac{1}{x} . e^{-\frac{c}{2}(x+y)^2}.$$

L'intégrale sera donc

$$\frac{1}{x} \int y . e^{-\frac{c}{2}(y+x)^2} . dy + f(x) = 0,$$

ou bien

$$\int y . e^{-\frac{c}{2}(y+x)^2} . dy + F(x) = 0.$$

Supposons en général

$$r = \alpha + \alpha_1 y + \alpha_2 y^2 + \alpha_3 y^3 + \ldots + \alpha_n y^n;$$

on aura en différentiant successivement par rapport à x et à y:

$$\frac{dr}{dx} = \frac{d\alpha}{dx} + \frac{d\alpha_1}{dx} . y + \frac{d\alpha_2}{dx} . y^2 + \frac{d\alpha_3}{dx} . y^3 + \cdots + \frac{d\alpha_n}{dx} . y^n$$

$$\frac{dr}{dy} = \alpha_1 + 2\alpha_2 y + 3\alpha_3 y^2 + \ldots + n\alpha_n y^{n-1}.$$

En substituant ces valeurs dans l'équation

$$y . \frac{dr}{dx} - (p + qy) . \frac{dr}{dy} - q = 0,$$

et réduisant, on obtiendra

$$\frac{d\alpha_n}{dx} . y^{n-1} + \left(\frac{d\alpha_{n-1}}{dx} - nq\alpha_n\right) y^n + \left(\frac{d\alpha_{n-2}}{dx} - (n-1)q\alpha_{n-1} - np\alpha_n\right) . y^{n-1}$$

$$+ \left(\frac{d\alpha_{n-3}}{dx} - (n-2)q\alpha_{n-2} - (n-1)p\alpha_{n-1}\right) y^{n-2} + \ldots$$

$$\ldots + \left(\frac{d\alpha_1}{dx} - 2q\alpha_2 - 3p\alpha_3\right) . y^2 + \left(\frac{d\alpha}{dx} - q\alpha_1 - 2p\alpha_2\right) y - q - p\alpha_1 = 0.$$

On a donc les équations

$$\frac{d\alpha_n}{dx}=0,\quad \frac{d\alpha_{n-1}}{dx}-nq\alpha_n=0,\quad \frac{d\alpha_{n-2}}{dx}-(n-1)q\alpha_{n-1}-np\alpha_n=0 \text{ etc.}$$

$$\frac{d\alpha_1}{dx}-2q\alpha_2-3p\alpha_3=0,\quad \frac{d\alpha}{dx}-q\alpha_1-2p\alpha_2=0,\quad q+p\alpha_1=0.$$

Voilà $n+2$ équations, mais comme le nombre des quantités inconnues n'est que $n+1$, il restera après l'élimination de celles-ci, entre p et q une équation de condition qui par conséquent doit avoir lieu pour que le facteur puisse avoir la forme supposée.

En intégrant on aura

$$\alpha_n=c,\quad \alpha_{n-1}=n\int\alpha_n q\,dx,\quad \alpha_{n-2}=(n-1)\int\alpha_{n-1}\cdot q\,dx+n\int\alpha_n p\,dx,$$

$$\alpha_{n-3}=(n-2)\cdot\int\alpha_{n-2}q\,dx+(n-1)\int\alpha_{n-1}p\,dx,$$

$$\ldots\ \alpha_{n-p}=(n-p+1)\int\alpha_{n-p+1}q\,dx+(n-p+2)\int\alpha_{n-p+2}p\,dx,\ \ldots$$

$$\alpha_1=2\int\alpha_2 q\,dx+3\int\alpha_3 p\,dx,\quad \alpha=\int\alpha_1 q\,dx+2\int\alpha_2 p\,dx,\quad q+p\alpha_1=0,$$

ou bien

$$\alpha_n=c,\ \alpha_{n-1}=nc\int q\,dx,\ \alpha_{n-2}=n(n-1)c\int q\,dx\int q\,dx+nc\int p\,dx,$$

$$\alpha_{n-3}=n(n-1)(n-2)c\int q\,dx\int q\,dx\int q\,dx+n(n-2)c\int p\,dx\int q\,dx+n(n-1)c\int p\,dx\int q\,dx$$

etc.

Soit par exemple $n=3$, on aura $\alpha_3=c$, $\alpha_2=3c\int q\,dx$ $\alpha_1=6c\int q\,dx\int q\,dx+3c\int p\,dx$, $\alpha=6c\int q\,dx\int q\,dx\int q\,dx+9c\int p\,dx\int q\,dx$. L'équation de condition deviendra donc

$$q+6cp\int q\,dx\int q\,dx+3cp\int p\,dx=0.$$

Soit $r=\frac{1}{\alpha+\beta y}$, on a $\frac{dr}{dx}=-\frac{\frac{d\alpha}{dx}+y\cdot\frac{d\beta}{dx}}{(\alpha+\beta y)^2}$, $\frac{dr}{dy}=-\frac{\beta}{(\alpha+\beta y)^2}$;

on aura donc

$$\frac{-y\left(\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{dx}\cdot y\right)}{(\alpha+\beta y)^2}+\frac{\beta(p+qy)}{(\alpha+\beta)^2}-q=0,$$

et de là en réduisant

$$y^2\left(\frac{d\beta}{dx}+\beta^2 q\right)+y\left(\frac{d\alpha}{dx}-\beta q+2\alpha\beta q\right)+\alpha^2 q-\beta p=0;$$

donc $\quad\frac{d\beta}{dx}+\beta^2 q=0,\ \frac{d\alpha}{dx}-\beta q+2\alpha\beta q=0,\ \alpha^2 q-\beta p=0;$

donc $\quad\beta=\frac{1}{\int q\,dx},\ \alpha=\sqrt{\left(\frac{p}{q\int q\,dx}\right)},\ \frac{d\alpha}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q\int q\,dx}{p}\right)}\cdot d\left(\frac{p}{q\int q\,dx}\right);$

et par suite

$$\tfrac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{q\int q dx}{p}\right)}\cdot d\left(\frac{p}{q\int q dx}\right)-\frac{q}{\int q dx}+2\sqrt{\left(\frac{p}{q\int q dx}\right)}\cdot\frac{q}{\int q dx}=0.$$

Si l'on fait $q=-\frac{d\beta}{\beta^2 . dx}$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\beta}{\beta dx}-2\alpha . \frac{d\beta}{\beta dx}=0,$$

d'où l'on tire successivement

$$\alpha=C\beta^2+\tfrac{1}{2}=\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2},$$

$$(C\beta^2+\tfrac{1}{2})^2 q-\beta p=0,\ p=\frac{(C\beta^2+\frac{1}{2})^2 . q}{\beta};$$

mais $\beta=\frac{1}{\int q dx}$; donc $p=\left(\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 q\int q dx.$

L'équation $ydy+\left[\left(\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2 q\int q dx+qy\right]dx=0$

deviendra donc intégrable en la multipliant par le facteur $e^{\left(\frac{1}{\alpha+\beta y}\right)}$, où $\alpha+\beta y$ $=\frac{C}{(\int q dx)^2}+\tfrac{1}{2}+\frac{y}{\int q dx}$.

Faisant $q=1$ on aura

$$ydy+\left[\left(\frac{C}{(x+a)^2}+\tfrac{1}{2}\right)^2(x+a)+y\right]dx=0,$$

et le facteur deviendra $e^{\frac{C+(x+a)y+\frac{1}{2}(x+a)^2}{(x+a)^2}}$.

Si $a=0$ et $C=a$, on a

$$ydy+\left(\frac{a^2}{x^3}+\frac{a}{x}+\tfrac{1}{4}x+y\right)dx=0,$$

et le facteur sera $e^{\frac{a}{x^2}+\frac{y}{x}+\frac{1}{2}}$.

Supposons maintenant $r=a\log(\alpha+\beta y)$, on aura

$$\frac{dr}{dx}=\frac{a\frac{d\alpha}{dx}+ay . \frac{d\beta}{dx}}{\alpha+\beta y},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{a\beta}{\alpha+\beta y};$$

par conséquent

$$y\left\{\frac{a\frac{d\alpha}{dx}+ay\frac{d\beta}{dx}}{\alpha+\beta y}\right\}-(p+qy) . \frac{a\beta}{\alpha+\beta y}-q=0,$$

et en réduisant

$$y^2 . a\frac{d\beta}{dx}+y\left(a\frac{d\alpha}{dx}-a\beta q-\beta q\right)-ap\beta-\alpha q=0;$$

donc $\frac{d\beta}{dx}=0$, $a\frac{d\alpha}{dx}-a\beta q-\beta q=0$, $ap\beta+\alpha q=0$;

donc

$\beta=c$, $\alpha=\frac{(a+1)c}{a}.\int qdx$, $acp+\frac{(a+1)c}{a}.q\int qdx=0$, et $p=-\frac{a+1}{a^2}q\int qdx$.

L'équation deviendra donc

$$ydy-\left(\frac{a+1}{a^2}q\int qdx-qy\right)dx=0,$$

et le facteur

$$e^r=\left(\frac{(a+1).c}{a}\int qdx+cy\right)^a.$$

Soit $q=1$, on aura

$ydy-\left(\frac{a+1}{a^2}(x+b)-y\right)dx=0$ et le facteur $\left(\frac{(a+1)}{a}(x+b)+y\right)^a$;

mais l'équation étant homogène la résolution n'en présente aucune difficulté.

Soit ensuite $r=a\log(y+\alpha)+a'\log(y+\alpha')$;

donc

$$\frac{dr}{dx}=\frac{a.\frac{d\alpha}{dx}}{y+\alpha}+\frac{a'.\frac{d\alpha'}{dx}}{y+\alpha'},\quad \frac{dr}{dy}=\frac{a}{y+\alpha}+\frac{a'}{y+\alpha'},$$

$$y\left\{\frac{a.\frac{d\alpha}{dx}}{y+\alpha}+\frac{a'.\frac{d\alpha'}{dx}}{y+\alpha'}\right\}-(p+qy)\left(\frac{a}{y+\alpha}+\frac{a'}{y+\alpha'}\right)-q=0;$$

donc en réduisant

$$y^2.\left(a\frac{d\alpha}{dx}+a'.\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a'+1)q\right)$$

$$+y.\left(a\alpha'\frac{d\alpha}{dx}+a'\alpha.\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a')p-q(a\alpha'+a'\alpha+\alpha+\alpha')\right)$$

$$-p(a\alpha'+a'\alpha)-q\alpha\alpha'=0.$$

On aura donc les trois équations suivantes

$$a.\frac{d\alpha}{dx}+a'.\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a'+1)q=0,$$

$$a\alpha'.\frac{d\alpha}{dx}+a'\alpha.\frac{d\alpha'}{dx}-(a+a')p-q(a\alpha'+a'\alpha+\alpha+\alpha')=0,$$

$$p(a\alpha'+a'\alpha)+q\alpha\alpha'=0.$$

La première équation donne

$$a\alpha+a'\alpha'=(a+a'+1)\int qdx;$$

donc $\alpha'=\frac{(a+a'+1)\int qdx-a\alpha}{a'}=\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int qdx-\frac{a}{a'}.\alpha.$

En substituant cette valeur dans la seconde et la troisième équation on obtiendra

$$\left[\left(a+\frac{a}{a'}(1+a)\right)\int q dx-\frac{a^2}{a'}\alpha\right]\frac{d\alpha}{dx}+\alpha\left((a'+a+1)q-a\frac{d\alpha}{dx}\right)-(a+a')p$$
$$-q\left[(a+1)\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q dx-(a+1)\frac{a}{a'}.\alpha+(a'+1)\alpha\right]=0,$$

ou bien

$$\frac{d\alpha}{dx}\left[\left(a+\frac{a(a+1)}{a'}\right)\int q dx-\alpha\left(\frac{a^2}{a'}+a\right)\right]+\alpha\left[(a'+a+1)q+q\left((a+1)\frac{a}{a'}-(a'+1)\right)\right]$$
$$-(a+a')p-q\left((a+1)+\frac{(a+1)^2}{a'}\right)\int q dx=0,$$

et

$$p\left\{\left[\left(a+\frac{a}{a'}(1+a)\right)\int q dx-\frac{a^2}{a'}\alpha\right]+a'\alpha\right\}+q\alpha.\left[\left(1+\frac{1+a}{a'}\right)\int q dx-\frac{a}{a'}\alpha\right]=0.$$

Soit $a+a'=0$ ou $a'=-a$, on aura

$$\frac{d\alpha}{dx}\int q dx+\alpha q-\left(\frac{a+1}{a}\right)q\int q dx=0,\ \text{donc}\ \frac{d\alpha}{dx}+\alpha.\frac{q}{\int q dx}-\left(\frac{a+1}{a}\right)q=0,$$

et en intégrant

$$\alpha=\frac{a+1}{a}.e^{-\int\frac{q dx}{\int q dx}}\int e^{\int\frac{q dx}{\int q dx}}q dx;$$

or $$\int\frac{q dx}{\int q dx}=\log\left(\int q dx\right);\ \text{donc}\ \alpha=\frac{(a+1).\int(\int q dx)q dx}{a\int q dx};$$

c'est-à-dire

$$\alpha=\frac{(a+1)\left[C+\frac{1}{2}(\int q dx)^2\right]}{a.\int q dx}=\frac{a+1}{2a}\int q dx+\frac{k}{\int q dx},$$

ou bien $$\alpha=\tfrac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)\int q dx+\frac{k}{\int q dx},$$

donc $$\alpha'=\tfrac{1}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\int q dx+\frac{k}{\int q dx};$$

maintenant on a

$$p=-\frac{q\alpha\alpha'}{a\alpha'+a'\alpha}=\frac{q}{4\int q dx}\left[\left(\int q dx+\frac{k}{\int q dx}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\int q dx\right)^2\right].$$

Il suit de là que l'équation

$$y dy+\left\{\frac{q}{4\int q dx}\left[\left(\int q dx+\frac{k}{\int q dx}\right)^2-\frac{1}{a^2}\left(\int q dx\right)^2\right]+q y\right\}dx=0$$

devient intégrable en la multipliant par le facteur

$$e^{r}=\left\{\frac{y+\frac{1}{2}\int q dx+\frac{k}{\int q dx}+\frac{1}{2a}\int q dx}{y+\frac{1}{2}\int q dx+\frac{k}{\int q dx}-\frac{1}{2a}\int q dx}\right\}^{a}.$$

Faisant $q=1$, l'équation deviendra

$$ydy+\left\{\frac{1}{4x}\left[\left(x+\frac{k}{x}\right)^2-\frac{x^2}{a^2}\right]+y\right\}dx=0,$$

et le facteur

$$\left\{\frac{y+\frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{x}}{y+\frac{x}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)+\frac{k}{x}}\right\}^a.$$

Soit enfin $r=\alpha+\beta y+a\log(y+\gamma)$, on aura

$$\frac{dr}{dx}=\frac{d\alpha}{dx}+y\cdot\frac{d\beta}{dx}+\frac{a\,.d\gamma}{(y+\gamma)dx};\quad \frac{dr}{dy}=\beta+\frac{a}{y+\gamma};$$

donc $$y\left(\frac{d\alpha}{dx}+y\cdot\frac{d\beta}{dx}+\frac{a}{y+\gamma}\cdot\frac{d\gamma}{dx}\right)-(p+qy)\left(\frac{a}{y+\gamma}+\beta\right)-q=0;$$

et en réduisant

$$y^3\cdot\frac{d\beta}{dx}+y^2\left(\frac{d\alpha}{dx}+\gamma\cdot\frac{d\beta}{dx}-q\beta\right)+y\left(\gamma\cdot\frac{d\alpha}{dx}+a\cdot\frac{d\gamma}{dx}-aq-\beta\gamma q-p\beta\right)$$
$$-p(a+\beta\gamma)-q\gamma=0.$$

On tire de là $\beta=c$, $\alpha=c\int qdx$, $a.\frac{d\gamma}{dx}-aq-cp=0$, $p(a+c\gamma)+q\gamma=0.$

Donc $\frac{d\gamma}{dx}=q+\frac{c}{a}\cdot p$, $\gamma=-\frac{ap}{q+cp}$. En supposant $a=1$, on aura $\frac{d\gamma}{dx}=q+cp$; mais $q+cp=-\frac{p}{\gamma}$; donc $\frac{d\gamma}{dx}=-\frac{p}{\gamma}$, ou $\gamma d\gamma=-pdx$, d'où $\gamma^2=k-2\int pdx$, et $\gamma=\sqrt{(k-2\int pdx)}$; mais $\gamma=\int qdx+c\int pdx$; donc $q=\frac{d\sqrt{(k-2\int pdx)}}{dx}-cp$, ou bien $q=-cp-\frac{p}{\sqrt{(k-2\int pdx)}}$, et de là $\alpha=-c^2\int pdx-c\int\frac{pdx}{\sqrt{(k-2\int pdx)}}=-c^2\int pdx+c\sqrt{(k-2\int pdx)}.$

En substituant ces valeurs on aura

$$ydy+\left[p-y\left(cp+\frac{p}{\sqrt{(k-2\int pdx)}}\right)\right]dx=0,$$

où le facteur est

$$\left(y+\sqrt{(k-2\int pdx)}\right).e^{cy-c^2\int pdx+c\sqrt{(k-2\int pdx)}}.$$

Si l'on fait $p=1$, on a

$$ydy+\left[1-y\left(c+\frac{1}{\sqrt{(k-2x)}}\right)\right]dx=0,$$

et le facteur

$$\left(y+\sqrt{(k-2x)}\right).e^{cy-c^2x+c\sqrt{(k-2x)}},$$

et en faisant $c=k=0$, on a

$$ydy+\left(1-y.\frac{1}{\sqrt{(-2x)}}\right)dx=0,$$

et le facteur

$$y+\sqrt{(-2x)}.$$

XXI.

Détermination d'une fonction au moyen d'une équation qui ne contient qu'une seule variable.

1.

La fonction fx étant donnée, trouver la fonction φx par l'équation
$$\varphi x + 1 = \varphi(fx).$$
Soit $x = \psi y$ et $fx = \psi(y+1)$, on aura
$$1 + \varphi\psi y = \varphi\psi(y+1);$$
ou bien
$$\varphi\psi(y+1) - \varphi\psi y = 1;$$
c'est-à-dire
$$\Delta\varphi\psi y = 1;$$
donc en intégrant
$$\varphi\psi y = y + \chi y,$$
où χy signifie une fonction périodique quelconque de y, de sorte que
$$\chi(y+1) = \chi y.$$
Maintenant $\psi y = x$, d'où l'on tire $y = {}'\psi x$, et par conséquent
$$\varphi x = {}'\psi x + \chi({}'\psi x) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

Il s'agit maintenant de trouver la fonction ${}'\psi x$. Cela se fait comme suit. On a $x = \psi y$ et $fx = \psi(y+1)$; donc
$$\psi(y+1) = f\psi y \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$
Voilà une équation aux différences finies, d'où l'on tire ψy, et cette fonction étant connue, on a
$$x = \psi y \text{ et de là } y = {}'\psi x.$$
De ce qui précède, on voit que le problème est toujours résoluble, et qu'il a même une infinité de solutions.

Supposons par exemple $fx = x^n$, l'équation (2) deviendra
$$\psi(y+1) = (\psi y)^n.$$
En mettant ici successivement $y+1$, $y+2$, etc. à la place de y, on aura
$$\psi(y+2) = \big(\psi(y+1)\big)^n = (\psi y)^{n^2}$$

$$\psi(y+3) = (\psi(y+2))^n = (\psi y)^{n^3},$$

et en général $\qquad \psi(y+x) = (\psi y)^{n^x}$.

Faisant $y = 0$ et $\psi(0) = a$, on a

$$\psi x = a^{n^x}, \text{ et par suite } \psi y = a^{n^y};$$

or $\psi y = x$: donc $a^{n^y} = x$, et de là $n^y = \dfrac{\log x}{\log a}$,

et
$$y = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n};$$

donc
$$'\psi x = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}.$$

L'équation (1) deviendra donc

$$\varphi x = \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}\right),$$

qui est la fonction cherchée.

Si l'on met x^n au lieu de x, on aura

$$\begin{aligned}\varphi(x^n) &= \frac{\log\log x^n - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log\log x^n - \log\log a}{\log n}\right)\\ &= \frac{\log n + \log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(\frac{\log n + \log\log x - \log\log a}{\log n}\right)\\ &= 1 + \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n} + \chi\left(1 + \frac{\log\log x - \log\log a}{\log n}\right) = 1 + \varphi x.\end{aligned}$$

La fonction a donc la propriété demandée. Le cas le plus simple est celui où $\chi y = 0$ et $a = e$, $\log e$ étant $= 1$; on aura donc

$$\varphi x = \frac{\log\log x}{\log n} \text{ et } \frac{\log\log x}{\log n} + 1 = \frac{\log\log x^n}{\log n}.$$

2.

Considérons en général l'équation

$$F(x, \varphi(fx), \varphi(\psi x)) = 0,$$

où F, f et ψ sont des fonctions données, et où l'on cherche la fonction φ.

Soit $fx = y_t$ et $\psi x = y_{t+1}$, l'équation devient

$$F(x, \varphi y_t, \varphi y_{t+1}) = 0.$$

Soit $\varphi y_t = u_t$, on aura $\varphi y_{t+1} = u_{t+1}$, et par conséquent

$$F(x, u_t, u_{t+1}) = 0.$$

De l'équation $fx = y_t$ on trouve $x = 'fy_t$; donc en substituant cette valeur dans l'équation $\psi x = y_{t+1}$, on obtient

$$y_{t+1} = \psi('fy_t) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

De cette équation on tire y_t et par conséquent aussi $x = 'fy_t$ en fonction de t. Cette valeur étant substituée dans l'équation $F(x, u_t, u_{t+1}) = 0$, donne

$$F('fy_t, u_t, u_{t+1}) = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

De cette équation on tire $u_t = \theta t = \varphi(y_t)$. Faisant $y_t = z$, on trouvera $t = 'y_z$; donc enfin

$$\varphi(z) = \theta('y_z).$$

Exemple. Trouver la fonction φ déterminée par l'équation

$$(\varphi x)^2 = \varphi(2x) + 2.$$

Soit $\varphi x = u_t = \varphi y_t$ et $\varphi(2x) = u_{t+1} = \varphi(y_{t+1})$, on aura

$$(u_t)^2 = u_{t+1} + 2.$$

On en tire $$u_{t+1} = u_t^2 - 2.$$

Supposons $$u_1 = a + \frac{1}{a},$$

donc $$u_2 = a^2 + \frac{1}{a^2}$$

$$u_3 = a^4 + \frac{1}{a^4}$$

et en général $$u_t = a^{2^{t-1}} + \frac{1}{a^{2^{t-1}}}.$$

Ayant $x = y_t$ et $2x = y_{t+1}$, on a $y_{t+1} = 2y_t$, d'où l'on tire

$$y_t = c.2^{t-1} = x;$$

donc $$2^{t-1} = \frac{x}{c}.$$

Cette valeur étant substituée dans l'équation

$$\varphi x = u_t = a^{2^{t-1}} + a^{-2^{t-1}},$$

donne $$\varphi x = a^{\frac{x}{c}} + a^{-\frac{x}{c}} = \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^x + \left(a^{\frac{1}{c}}\right)^{-x},$$

ou bien $$\varphi x = b^x + b^{-x}.$$

Donc $$(b^x + b^{-x})^2 = b^{2x} + b^{-2x} + 2.$$

XXII.

Note sur la fonction

$$\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$$

La fonction $\psi(x) = x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots$ jouit de plusieurs propriétés remarquables, que je vais déduire dans cette note. On trouve quelques-unes de ces propriétés dans *Legendre* exerc. de calc. int. Tom. I pag. 244 et suiv. Les autres, si je ne me trompe, sont nouvelles. Comme la série $x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots$ n'est convergente que lorsque x ne surpasse pas l'unité, il s'ensuit que la fonction $\psi(x)$ n'a de valeur que pour les x compris entre les limites -1 et $+1$. Pour toute autre valeur de x, la fonction n'existe pas, parce qu'elle est exprimée par une série divergente. Nous supposons donc toujours x compris entre les limites -1 et $+1$.

En différentiant on obtient

$$d\psi x = dx\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \dots + \frac{x^{n-1}}{n} + \dots\right),$$

c'est-à-dire
$$d\psi x = -\frac{dx}{x}\log(1-x);$$

donc
$$\psi x = -\int \frac{dx}{x}.\log(1-x) \quad \dots\dots\dots\dots \quad (1)$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$.

De cette expression de ψx il est facile de déduire les propriétés de cette fonction.

En mettant $1 - x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(1-x) = \int \frac{dx}{1-x}.\log x,$$

et par suite $\psi x + \psi(1-x) = -\int\left(\frac{dx}{x}\log(1-x) - \frac{dx}{1-x}\log x\right);$

donc $\psi x + \psi(1-x) = C - \log x.\log(1-x).$

Si l'on fait ici $x=0$, $\log x.\log(1-x)$ disparaît, et on a

$$\psi(1)=C;$$

mais $$\psi(1)=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\frac{\pi^2}{6}\ \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

On en conclut

$$\psi x+\psi(1-x)=\frac{\pi^2}{6}-\log x.\log(1-x)\ \ldots\ldots\ (3)$$

Cette formule donne la valeur de la fonction ψx pour toutes les valeurs de x comprises entre $\frac{1}{2}$ et 1, lorsqu'on connaît la valeur de la fonction pour les x qui sont compris entre 0 et $\frac{1}{2}$. Lorsque $x=\frac{1}{2}$, cette formule donne

$$\psi(\tfrac{1}{2})=\frac{\pi^2}{12}-\tfrac{1}{2}(\log 2)^2\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (4)$$

Si dans l'expression de ψx on met $-x$ au lieu de x, on obtient

$$\psi(-x)=-x+\frac{x^2}{2^2}-\frac{x^3}{3^2}+\frac{x^4}{4^2}-\text{etc.}$$

donc $$\psi(x)+\psi(-x)=\tfrac{1}{2}\left(x^2+\frac{x^4}{2^2}+\frac{x^6}{3^2}+\ldots\right);$$

c'est-à-dire, puisque

$$x^2+\frac{x^4}{2^2}+\frac{x^6}{3^2}+\ldots=\psi(x^2),$$

$$\psi(x)+\psi(-x)=\tfrac{1}{2}\psi(x^2)\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (5)$$

Cette formule donne la fonction ψx pour les valeurs négatives de x, lorsqu'on connaît la fonction pour les valeurs positives de la variable. Dans le cas particulier où l'on fait $x=1$, on obtient

$$\psi(-1)=-\tfrac{1}{2}\psi(1)=-\frac{\pi^2}{12}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (6)$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\ldots$$

ce qui est connu.

Si dans l'équation (1) au lieu de x on met $\frac{x}{x+1}$, il viendra

$$\psi\left(\frac{x}{x+1}\right)=\int\left(\frac{dx}{x}-\frac{dx}{x+1}\right)\log(1+x)=\int\frac{dx}{x}\log(1+x)-\int\frac{dx}{x+1}\log(x+1).$$

Or on a évidemment

$$\int\frac{dx}{x}\log(1+x)=-\psi(-x)$$

et $$\int\frac{dx}{1+x}.\log(1+x)=\tfrac{1}{2}(\log(1+x))^2;$$

donc, en remarquant que la constante arbitraire due à l'intégration est zéro,

$$\psi\left(\frac{x}{1+x}\right)+\psi(-x)=-\tfrac{1}{2}\left(\log(1+x)\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots (7)$$

En éliminant la quantité $\psi(-x)$ des équations (5) et (7) on obtiendra la suivante

$$\psi(x)=\tfrac{1}{2}\left(\log(1+x)\right)^2+\tfrac{1}{2}\psi(x^2)+\psi\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad \ldots\ldots (8)$$

Par cette formule on peut exprimer une fonction donnée ψx par d'autres fonctions dans lesquelles la variable est aussi petite qu'on voudra. Car lorsque x est positif et moindre que l'unité, on a $x^2<x$ et $\frac{x}{x+1}<x$. Si l'on fait par exemple $x=\frac{1}{2}$ et $x=\frac{1}{3}$, la formule donne

$$\psi(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}(\log\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{4})+\psi(\tfrac{1}{3}),$$

$$\psi(\tfrac{1}{3})=\tfrac{1}{2}(\log\tfrac{4}{3})^2+\tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{9})+\psi(\tfrac{1}{4}).$$

En combinant ces deux équations avec celle-ci

$$\frac{\pi^2}{12}=\tfrac{1}{2}(\log 2)^2+\psi(\tfrac{1}{2}),$$

on trouvera $\quad \psi(\tfrac{1}{3})=\frac{\pi^2}{18}-\tfrac{1}{6}(\log 3)^2+\tfrac{1}{6}\psi(\tfrac{1}{9})$

$$\psi(\tfrac{1}{4})=\frac{\pi^2}{18}+2\log 2.\log 3-2(\log 2)^2-\tfrac{2}{3}(\log 3)^2-\tfrac{1}{3}\psi(\tfrac{1}{9}).$$

De cette manière les fonctions $\psi(\frac{1}{3})$ et $\psi(\frac{1}{4})$ sont exprimées par des quantités connues et la fonction $\psi(\frac{1}{9})$. Si dans l'équation (8) on fait $x=\frac{1}{9}$ on obtient

$$\psi(\tfrac{1}{9})=\tfrac{1}{2}(\log\tfrac{10}{9})^2+\psi(\tfrac{1}{10})+\tfrac{1}{2}\psi(\tfrac{1}{81}).$$

etc.

Toutes les formules démontrées ci-dessus se trouvent dans l'ouvrage cité de Mr. *Legendre*. Elles ne contiennent, comme on voit, qu'une seule quantité arbitraire. Je vais maintenant démontrer quelques autres qui contiennent deux quantités indépendantes entre elles, et desquelles les formules précédentes doivent être considérées comme des cas particuliers.

Si dans l'équation

$$\psi x=-\int\frac{dx}{x}\log(1-x)$$

on met $\frac{a}{1-a}\cdot\frac{y}{1-y}$ à la place de x, on aura, en considérant a comme constant:

$$\psi\left(\frac{a}{1-a}\cdot\frac{y}{1-y}\right)=-\int\left(\frac{dy}{y}+\frac{dy}{1-y}\right).\log\left(\frac{1-a-y}{(1-a)(1-y)}\right);$$

c'est-à-dire

$$\psi\left(\frac{a}{1-a}\cdot\frac{y}{1-y}\right)=-\int\frac{dy}{y}\log\left(1-\frac{y}{1-a}\right)+\int\frac{dy}{y}\log(1-y)$$
$$-\int\frac{dy}{1-y}.\log\left(1-\frac{a}{1-y}\right)+\int\frac{dy}{1-y}.\log(1-a).$$

Toutes les intégrales du second membre de cette équation peuvent s'exprimer par la fonction ψ. En effet, on a

$$\int\frac{dy}{y}.\log\left(1-\frac{y}{1-a}\right)=-\psi\left(\frac{y}{1-a}\right),$$
$$\int\frac{dy}{y}.\log(1-y)\qquad=-\psi(y);$$

donc

$$\psi\left(\frac{a}{1-a}\cdot\frac{y}{1-y}\right)=\psi\left(\frac{y}{1-a}\right)-\psi y-\log(1-a).\log(1-y)-\int\frac{dy}{1-y}.\log\left(1-\frac{a}{1-y}\right).$$

Soit $\frac{a}{1-y}=z$ ou, ce qui revient au même, $1-y=\frac{a}{z}$, $dy=\frac{adz}{z^2}$, on aura

$$\int\frac{dy}{1-y}.\log\left(1-\frac{a}{1-y}\right)=\int\frac{dz}{z}\log(1-z)=-\psi(z)=-\psi\left(\frac{a}{1-y}\right);$$

donc l'équation ci-dessus donnera

$$\psi\left(\frac{a}{1-a}\cdot\frac{y}{1-y}\right)=\psi\left(\frac{y}{1-a}\right)+\psi\left(\frac{a}{1-y}\right)-\psi y-\log(1-a).\log(1-y)+C.$$

Pour déterminer la constante arbitraire, soit $y=0$, et l'on aura $C=-\psi(a)$. On aura par conséquent en écrivant x au lieu de a:

$$\psi\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right)=\psi\left(\frac{y}{1-x}\right)+\psi\left(\frac{x}{1-y}\right)-\psi y-\psi x-\log(1-y).\log(1-x)\qquad(9)$$

Dans cette formule x et y doivent avoir de telles valeurs que les quantités $\left(\frac{x}{1-x}\cdot\frac{y}{1-y}\right)$, $\frac{y}{1-x}$, $\frac{x}{1-y}$, y, x ne surpassent pas l'unité. C'est ce qui aura lieu lorsque x et y sont positifs, si $x+y<1$. Si y est négatif $=-m$, on doit avoir $x+m<1$; et si x et y sont tous deux négatifs, il suffit qu'aucune de ces quantités ne surpasse l'unité.

XXIII.

Extraits de quelques lettres de l'auteur à Mr. Crelle.

1.

Si une équation du cinquième degré dont les coefficiens sont *des nombres rationnels,* est résoluble algébriquement, on peut donner aux racines la forme suivante:

$$x = c + A.a^{\frac{1}{5}}.a_1^{\frac{2}{5}}.a_2^{\frac{4}{5}}.a_3^{\frac{3}{5}} + A_1.a_1^{\frac{1}{5}}.a_2^{\frac{2}{5}}.a_3^{\frac{4}{5}}.a^{\frac{3}{5}} + A_2.a_2^{\frac{1}{5}}.a_3^{\frac{2}{5}}.a^{\frac{4}{5}}.a_1^{\frac{3}{5}} + A_3.a_3^{\frac{1}{5}}.a^{\frac{2}{5}}.a_1^{\frac{4}{5}}.a_2^{\frac{3}{5}},$$

où

$$a = m + n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{\left[h\left(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)}\right)\right]},$$

$$a_1 = m - n\sqrt{(1+e^2)} + \sqrt{\left[h\left(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)}\right)\right]},$$

$$a_2 = m + n\sqrt{(1+e^2)} - \sqrt{\left[h\left(1+e^2+\sqrt{(1+e^2)}\right)\right]},$$

$$a_3 = m - n\sqrt{(1+e^2)} - \sqrt{\left[h\left(1+e^2-\sqrt{(1+e^2)}\right)\right]},$$

$$A = K + K'a + K''a_2 + K'''aa_2, \quad A_1 = K + K'a_1 + K''a_3 + K'''a_1a_3$$

$$A_2 = K + K'a_2 + K''a + K'''aa_2, \quad A_3 = K + K'a_3 + K''a_1 + K'''a_1a_3.$$

Les quantités c, h, e, m, n, K, K', K'', K''' sont des nombres *rationnels.*

Mais de cette manière l'équation $x^5 + ax + b = 0$ n'est pas résoluble, tant que a et b sont des quantités quelconques. J'ai trouvé de pareils théorèmes pour les équations du 7ème, 11ème, 13ème etc. degré.

Friberg le 14 mars 1826.

2.

Une propriété générale des fonctions dont la différentielle est algébrique, consiste en ce que la somme d'un nombre *quelconque* de fonctions peut être exprimée par un nombre déterminé des mêmes fonctions. Savoir:

$$\varphi(x_1) + \varphi(x_2) + \varphi(x_3) + \dots + \varphi(x_\mu) = v - \left(\varphi(z_1) + \varphi(z_2) + \varphi(z_3) + \dots + \varphi(z_n)\right).$$

$x_1, x_2, \dots x_\mu$ sont des quantités quelconques, $z_1, z_2, \dots z_n$ des fonctions algébriques de ces quantités, et v une fonction algébrique-logarithmique des mêmes

quantités. n est un nombre déterminé indépendant de μ. Si par exemple φ est une fonction elliptique, on a, comme on sait, $n=1$. Si la fonction n'est pas elliptique, on n'en connaît jusqu'à présent aucune propriété. Comme un des cas les plus remarquables je vais rapporter le suivant:

En désignant la fonction

$$\int \frac{(\alpha+\beta x).dx}{\sqrt{(a+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+a_5x^5+a_6x^6)}}$$

par φx, on a

$$1) \qquad \varphi(x_1)+\varphi(x_2)+\varphi(x_3)=C-(\varphi(y_1)+\varphi(y_2)),$$

où x_1, x_2, x_3, sont trois quantités variables indépendantes, C une constante et y_1, y_2 les deux racines de l'équation

$$y^2-\left(\frac{c_2^2+2c_1-a_4}{2c-a_5}-x_1-x_2-x_3\right)y+\frac{\left(\frac{c^2-a}{x_1.x_2.x_3}\right)}{2c_2-a_5}=0.$$

Les quantités c, c_1, c_2 sont déterminées par les trois équations linéaires:

$$c+c_1x_1+c_2x_1^2+x_1^3=\sqrt{(a+a_1x_1+a_2x_1^2+a_3x_1^3+\ldots+a_6x_1^6)}$$
$$c+c_1x_2+c_2x_2^2+x_2^3=\sqrt{(a+a_1x_2+a_2x_2^2+\ldots\ldots\ldots+a_6x_2^6)}$$
$$c+c_1x_3+c_2x_3^2+x_3^3=\sqrt{(a+a_1x_3+a_2x_3^2+\ldots\ldots\ldots+a_6x_3^6)}.$$

Toute la théorie de la fonction φ est comprise dans l'équation (1), car la propriété exprimée par cette équation suffit, comme on peut démontrer, pour la détermination complète de cette fonction.

Paris le 9 août 1826.

3.

J'ai trouvé la somme de la série suivante

$$\sin\varphi.\frac{a}{1+a}+\sin 3\varphi.\frac{a^3}{1+a^3}+\sin 5\varphi.\frac{a^5}{1+a^5}+\ldots$$

où a et φ sont des quantités réelles quelconques. Elle peut s'exprimer par des fonctions elliptiques.

Christiania le 15 novembre 1827.

4.

Théorèmes sur les équations.

A. Soient $x_1, x_2, \ldots x_n$ des quantités inconnues quelconques et $\varphi(x_1, x_2 \ldots x_n)$ une fonction entière de ces quantités du degré m, m étant un nombre premier quelconque; si l'on suppose entre x_1, x_2, $\ldots$ x_n les n équations suivantes:

$$\varphi(x_1,\ x_2, \ldots x_n) = 0,$$
$$\varphi(x_2,\ x_3, \ldots x_n,\ x_1) = 0,$$
$$\varphi(x_3,\ x_4, \ldots x_n,\ x_1,\ x_2) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi(x_n,\ x_1,\ x_2, \ldots x_{n-1}) = 0,$$

on en pourra généralement éliminer $n-1$ quantités, et une quelconque x sera déterminée à l'aide d'une équation du degré m^n. Il est clair que le premier membre de cette équation sera divisible par la fonction $\varphi(x, x, x, \ldots x)$ qui est du degré m. On aura donc une équation en x du degré $m^n - m$.

Cela posé, je dis que cette équation sera décomposable en $\frac{m^n - m}{n}$ équations, chacune du degré n, et dont les coefficiens sont déterminés à l'aide d'une équation du degré $\frac{m^n - m}{n}$. En supposant connues les racines de cette équation, les équations du degré n seront résolubles *algébriquement*.

Par exemple si l'on suppose $n = 2$, $m = 3$, on aura une équation en x du degré $3^2 - 3 = 6$. Cette équation du sixième degré sera résoluble algébriquement, car en vertu du théorème, on pourra la décomposer en trois équations du second degré. Pareillement si l'on cherche les valeurs inégales de x_1, x_2, x_3 propres à satisfaire aux équations

$$x_2 = \frac{a + bx_1 + cx_1^2}{\alpha + \beta x_1},\quad x_3 = \frac{a + bx_2 + cx_2^2}{\alpha + \beta x_2},\quad x_1 = \frac{a + bx_3 + cx_3^2}{\alpha + \beta x_3},$$

on aura pour déterminer x_1, x_2, x_3 une équation du sixième degré, mais elle sera décomposable en deux équations du troisième degré, les coefficiens de ces équations étant déterminés par une équation du second degré.

B. Si trois racines d'une équation quelconque irréductible dont le degré est un nombre premier, sont liées entre elles de sorte que l'une de ces racines peut être exprimée rationnellement par les deux autres, l'équation en question sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

C. Si deux racines d'une équation irréductible dont le degré est un nombre premier, ont entre elles un rapport tel qu'on peut exprimer une des deux racines rationnellement par l'autre, cette équation sera toujours résoluble à l'aide de radicaux.

Christiania, le 18 octobre 1828.

XXIV.

Lettre de l'auteur à Mr. Legendre.

Monsieur. La lettre que Vous avez bien voulu m'adresser en date du 25 octobre m'a causé la plus vive joie. Je compte parmi les momens les plus heureux de ma vie celui où j'ai vu mes essais mériter l'attention de l'un des plus grands géomètres de notre siècle. Cela a porté au plus haut degré mon zèle pour mes études. Je les continuerai avec ardeur, mais si je serai assez heureux pour faire quelques découvertes, je les attribuerai à Vous plutôt qu'à moi, car certainement je n'aurais rien fait sans avoir été guidé par Vos lumières.

J'accepte avec reconnaissance l'exemplaire de Votre traité des fonctions elliptiques que Vous voulez bien m'offrir.

Je m'empresserai de Vous donner les éclaircissements que Vous m'avez fait l'honneur de me demander. Lorsque je dis que le nombre de tranformations différentes correspondantes à un nombre premier n est $6(n+1)$, j'entends par cela qu'on peut trouver $6(n+1)$ valeurs différentes pour le module c', en supposant l'équation différentielle

$$\frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c'^2y^2)]}} = \varepsilon \cdot \frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}$$

et en mettant pour y une fonction rationnelle de la forme:

$$y = \frac{A_0 + A_1x + A_2x^2 + \ldots + A_nx^n}{B_0 + B_1x + B_2x^2 + \ldots + B_nx^n}.$$

C'est ce qui a en effet lieu; mais parmi les valeurs de c' il y en aura $n+1$ qui répondent à la forme suivante de y:

$$y = \frac{A_1x + A_3x^3 + A_5x^5 + \ldots + A_nx^n}{1 + B_2x^2 + B_4x^4 + \ldots + B_{n-1}x^{n-1}}.$$

Ce sont ces $n+1$ modules dont parle M. *Jacobi*. Ils sont en effet racines d'une même équation du degré $n+1$. Ces $n+1$ valeurs étant supposées connues, il est facile d'avoir les $5(n+1)$ autres.

En effet, en désignant par c' un quelconque des modules, on aura encore ceux-ci:

$$\frac{1}{c'},\quad \left(\frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\right)^2,\quad \left(\frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\right)^2,$$

auxquelles répondent les valeurs suivantes de y:

$$c'y',\ \frac{1+\sqrt{c'}}{1-\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}},\ \frac{1-\sqrt{c'}}{1+\sqrt{c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{c'}}{1\mp y'\sqrt{c'}},\ \frac{1+\sqrt{-c'}}{1-\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$
$$\frac{1-\sqrt{-c'}}{1+\sqrt{-c'}}\cdot\frac{1\pm y'\sqrt{-c'}}{1\mp y'\sqrt{-c'}},$$

ce qui est facile à vérifier, en faisant la substitution dans l'équation différentielle.

Toutes les $6(n+1)$ valeurs du module c' sont différentes entre elles, excepté pour quelques valeurs particulières de c. Dans ce qui précède, n est supposé impair et plus grand que l'unité. Si n est égal à deux, c' aura encore $6(n+1)=18$ valeurs différentes. De ces 18 valeurs il y aura six, qui répondent à une valeur de y de la forme:

$$y=\frac{a+bx^2}{a'+b'x^2}:$$

ils sont:

$$c'=\frac{1\pm c}{1\mp c},\quad \frac{1\pm\sqrt{(1-c^2)}}{1\mp\sqrt{(1-c^2)}},\quad \frac{c\pm\sqrt{(c^2-1)}}{c\mp\sqrt{(c^2-1)}}.$$

Il y en aura quatre qui répondent à une valeur de y de la forme $y=\frac{ax}{1+bx^2}$, savoir:

$$c'=\frac{2\sqrt{\pm c}}{1\pm c},\quad \frac{1\pm c}{2\sqrt{\pm c}},\quad y=(1\pm c)\cdot\frac{x}{1\pm cx^2}\ \text{etc.}$$

Enfin pour les huit autres modules, y aura la forme:

$$a\cdot\frac{A+Bx+Cx^2}{A-Bx+Cx^2}.$$

Ces huit modules seront

$$c'=\left(\frac{1\pm c\pm\sqrt{(2\sqrt{\pm c})}}{1\pm c\mp\sqrt{(2\sqrt{\pm c})}}\right)^2.$$

J'ai donné des développements plus étendus sur cet objet dans un mémoire imprimé dans le cahier 4. tome III. du journal de Mr. *Crelle* *). Peut-être vous en aurez déjà connaissance.

Les fonctions elliptiques jouissent d'une certaine propriété bien remarquable et que je crois nouvelle. Savoir si l'on fait pour abréger:

---

*) Le mémoire XVIIème Tome I de cette édition.

$$\Delta x = \pm \sqrt{((1-x^2)(1-c^2x^2))},$$

$$\Pi(x) = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{c^2}\right)\Delta x},\ \varpi(x) = \int \frac{dx}{\Delta x},\ \varpi_0(x) = \int \frac{x^2 dx}{\Delta x},$$

on aura toujours:

$$\varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \ldots + \varpi(x_\mu) = C$$

$$\varpi_0(x_1) + \varpi_0(x_2) + \ldots + \varpi_0(x_\mu) = C + p,$$

où p est une quantité algébrique, et

$$\Pi(x_1) + \Pi(x_2) + \ldots + \Pi(x_\mu) = C - \frac{a}{2\Delta a} \cdot \log\left(\frac{fa + \varphi a \cdot \Delta a}{fa - \varphi a \cdot \Delta a}\right),$$

si l'on suppose les variables $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ liées entre elles de la manière à satisfaire à une équation de la forme:

$$(fx)^2 - (\varphi x)^2 \cdot (1-x^2)(1-c^2x^2) = A \cdot (x^2-x_1^2)(x^2-x_2^2) \ldots (x^2-x_\mu^2);$$

fx et φx étant deux fonctions entières quelconques de *l'indéterminée x*, mais dont l'une est *paire* l'autre *impaire*. Cette propriété me paraît d'autant plus remarquable qu'elle appartiendra à toute fonction transcendente

$$\Pi(x) = \int \frac{dx}{\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\Delta x},$$ en supposant $(\Delta x)^2$ fonction entière quelconque de x^2. J'en ai donné la démonstration dans un petit mémoire inséré dans le cahier 4. du tome III. du journal de Mr. *Crelle**). Vous verrez que rien n'est plus simple que d'établir cette propriété générale. Elle m'a été fort utile dans mes recherches sur les fonctions elliptiques. En effet j'ai fondé sur elle toute la théorie de ces fonctions. Les circonstances ne me permettent point de publier un ouvrage de quelque étendue que j'ai composé depuis peu, car ici je ne trouverai personne qui fera l'imprimer à ses frais. C'est pourquoi j'en ai fait un extrait, qui paraîtra dans le journal de Mr. *Crelle***). La première partie, dans laquelle j'ai considéré les fonctions elliptiques en général, doit paraitre dans le cahier prochain. Il me serait infiniment intéressant de savoir votre jugement sur ma méthode. Je me suis surtout attaché à donner de la généralité à mes recherches. Je ne sais si j'ai pu y réussir. La seconde partie qui suivra incessament la première, traitera principalement les fonctions avec des modules réels et moindres que l'unité. C'est surtout la fonction inverse de la

*) Le mémoire XVème Tome I de cette édition.

**) Le mémoire XXIème T. I d. c. éd.

première espèce qui est l'objet de mes recherches dans cette seconde partie. Cette fonction, dont j'ai démontré quelques unes des propriétés les plus simples dans mes recherches sur les fonctions elliptiques, est généralement d'un usage infini dans cette théorie. Elle facilite à un degré inespéré la théorie de la transformation. Un premier essai sur cet objet est contenu dans le mémoire inséré dans le No. 138. du journal de Mr. *Schumacher**), mais actuellement je puis rendre cette théorie beaucoup plus simple.

La théorie des fonctions elliptiques m'a conduit à considérer deux nouvelles fonctions qui jouissent de plusieurs propriétés remarquables. Si l'on fait

$$y = \lambda(x),$$

où

$$x = \int_0^y \frac{dy}{\sqrt{[(1-y^2)(1-c^2y^2)]}},$$

$\lambda(x)$ sera la fonction inverse de la première espèce. J'ai trouvé qu'on peut développer cette fonction de la manière suivante:

$$\lambda(x) = \frac{x + A_1x^3 + A_2\,x^5 + A_3x^7 + \ldots}{1 + B_2x^4 + B_3\,x^6 + B_4x^8 + \ldots},$$

où le numérateur et le dénominateur sont des séries *toujours convergentes* quelles que soient les valeurs de la variable x et du module c, réelles ou imaginaires. Les coefficiens A_1, A_2, ... B_2, B_3, ... sont des fonctions entières de c^2. Si l'on fait

$$\varphi x = x + A_1x^3 + A_2x^5 + \ldots,$$
$$fx = 1 + B_2x^4 + B_3x^6 + \ldots,$$

où φx et fx sont les deux fonctions en question, elles auront la propriété exprimée par les deux équations:

$$\varphi(x+y).\varphi(x-y) = (\varphi x.fy)^2 - (\varphi y.fx)^2:$$
$$f(x+y).f(x-y) = (fx.fy)^2 - c^2(\varphi x.\varphi y)^2,$$

x et y étant des quantités quelconques. On pourra représenter ces fonctions de beaucoup de manières. Par exemple on a:

$$\varphi\left(x\frac{\varpi}{\pi}\right) = A.e^{\alpha x^2}.\sin x.(1-2\cos 2x.q^2+q^4)(1-2\cos 2x.q^4+q^8)(1-2\cos 2x.q^6+q^{12})\ldots,$$

$$\varphi\left(x\frac{\omega}{\pi}\right) = A'.e^{\alpha' x^2}(e^x-e^{-x})(1-p^2.e^{2x})(1-p^2.e^{-2x})(1-p^4.e^{2x})(1-p^4.e^{-2x})\ldots,$$

$$f\left(x\frac{\varpi}{\pi}\right) = B.e^{\alpha x^2}(1-2\cos 2x.q+q^2)(1-2\cos 2x.q^3+q^6)\ldots,$$

$$f\left(x\frac{\omega}{\pi}\right) = B'.e^{\alpha' x^2}(1-p.e^{-2x})(1-p.e^{2x})(1-p^3.e^{-2x})(1-p^3.e^{2x})\ldots,$$

*) Le mémoire XIIIème T. I d. c. éd.

où A, A', B, B', a, a' sont des quantités indépendantes de x, $q = e^{-\frac{\varpi}{\omega}\pi}$, $p = e^{-\frac{\omega}{\varpi}\pi}$; $\frac{\omega}{2}$ et $\frac{\varpi}{2}$ enfin sont *fonctions complètes* correspondantes aux modules $b = \sqrt{(1-c^2)}$ et c.

Outre les fonctions elliptiques il y a deux autres branches de l'analyse, dont je me suis beaucoup occupé, savoir la théorie de l'intégration des formules différentielles algébriques et la théorie des équations. A l'aide d'une méthode particulière j'ai trouvé beaucoup de résultats nouveaux, qui surtout jouissent d'une tres grande généralité. Je suis parti du problème suivant de la théorie de l'intégration:

"Etant proposé un nombre quelconque d'intégrales $\int y dx, \int y_1 dx, \int y_2 dx$ etc, où y, y_1, y_2, ... sont des fonctions algébriques quelconques de x, trouver toutes les relations possibles entre elles qui pourront s'exprimer par des fonctions algébriques et logarithmiques."

J'ai trouvé d'abord qu'une relation quelconque doit avoir la forme suivante:

$$A\int y dx + A_1\int y_1 dx + A_2\int y_2 dx + \ldots = u + B_1 \log v_1 + B_2 \log v_2 + \ldots,$$

où A, A_1, A_2, ... B_1, B_2, ... etc. sont des constantes, et u, v_1, v_2, ... des fonctions *algébriques* de x. Ce théorème facilite extrêmement la solution du problème; mais le plus important est le suivant:

"Si une intégrale $\int y dx$, où y est lié à x par une équation algébrique quelconque, peut être exprimée d'une manière quelconque *explicitement ou implicitement* à l'aide de fonctions algébriques et logarithmiques, on pourra toujours supposer:

$$\int y dx = u + A_1 \log v_1 + A_2 \log v_2 + \ldots + A_m \log v_m,$$

où A_1, A_2, ... sont des constantes, et u, v_1, v_2, ... v_m des *fonctions rationnelles* de x et y."

P. ex. si $y = \frac{r}{\sqrt{R}}$ où r et R sont des fonctions rationnelles, on aura dans tous les cas où $\int \frac{r dx}{\sqrt{R}}$ est intégrable:

$$\int \frac{r dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A_1 \log\left(\frac{p_1 + q_1\sqrt{R}}{p_1 - q_1\sqrt{R}}\right) + A_2 \log\left(\frac{p_2 + q_2\sqrt{R}}{p_2 - q_2\sqrt{R}}\right) + \ldots,$$

où p, p_1, p_2, ... q_1, q_2, ... sont des fonctions rationnelles de x.

J'ai réduit de cette manière au plus petit nombre possible les fonctions transcendantes contenues dans l'expression:

$$\int \frac{r dx}{\sqrt[m]{R}},$$

où R est une fonction entière, et r une fonction rationnelle. J'ai découvert de même des propriétés générales de ces fonctions. Savoir:

Soient $p_0, p_1, p_2, \ldots p_{m-1}$ des fonctions entières quelconques d'une quantité indéterminée x, et regardons les coefficiens des puissances de x dans ces fonctions comme des *variables*. Soient de même $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2, \ldots \alpha^{m-1}$ les racines de l'équation $\alpha^m = 1$, m étant premier ou non, et faisons:

$$s_k = p_0 + \alpha^k p_1 R^{\frac{1}{m}} + \alpha^{2k} p_2 R^{\frac{2}{m}} + \ldots + \alpha^{(m-1)k} R^{\frac{m-1}{m}}.$$

Cela posé, en formant le produit:

$$s_0 . s_1 . s_2 \ldots s_{m-1} = V,$$

V sera comme vous voyez une fonction entière de x. Maintenant si l'on désigne par $x_1, x_2, \ldots x_\mu$ les racines de l'équation $V = 0$, la fonction transcendante

$$\psi(x) = \int \frac{dx}{(x-a) R^{\frac{n}{m}}},$$

où $\frac{n}{m} < 1$, et a une quantité quelconque, aura la propriété suivante:

$$\psi(x_1) + \psi(x_2) + \ldots + \psi(x_\mu)$$
$$= C + \frac{1}{R'^{\frac{n}{m}}} \left(\log(s'_0) + \alpha^n \log(s'_1) + \alpha^{2n} \log(s'_2) + \ldots + \alpha^{(m-1)n} \log(s'_{m-1})\right),$$

C étant une constante, et

$$R', \; s'_0, \; s'_1, \ldots s'_{m-1}$$

les valeurs, que prendront respectivement les fonctions

$$R, \; s_0, \; s_1, \ldots s_{m-1},$$

en écrivant simplement a au lieu de x.

Rien n'est plus facile que la démonstration de ce théorème. Je le donnerai dans un de mes mémoires prochains dans le journal de Mr. *Crelle*. Un corollaire bien remarquable du théorème précédent est le suivant.

Si l'on fait $\varpi(x) = \int \frac{r dx}{R^{\frac{n}{m}}}$, où r est une fonction quelconque entière de x, dont le degré est moindre que $\frac{n}{m} . \nu - 1$, où ν est le degré de R, la fonc-

tion $\varpi(x)$ est telle que

$$\varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \ldots + \varpi(x_\mu) = \text{const.}$$

Si par exemple $m = 2$, $n = 1$, $\nu = 4$, on aura $r = 1$, donc

$$\varpi(x) = \int \frac{dx}{\sqrt{R}} \text{ et } \varpi(x_1) + \varpi(x_2) + \ldots + \varpi(x_\mu) = C.$$

C'est le cas des fonctions elliptiques de la première espèce.

Les belles applications que vous avez donné des fonctions elliptiques à l'intégration des formules différentielles, m'ont engagé à considérer un problème très général à cet égard, savoir:

Exprimer, s'il est possible, une intégrale de la forme $\int y dx$, où y est une fonction algébrique quelconque par des fonctions algébriques, logarithmiques et *elliptiques* de la manière suivante:

$\int y dx =$ fonct. algéb. de $(x, \log v_1, \log v_2, \log v_3, \ldots \Pi_1(z_1), \Pi_2(z_2), \Pi_3(z_3), \ldots)$, $v_1, v_2, v_3, \ldots z_1, z_2, z_3, \ldots$ étant des fonctions algébriques de x les plus générales possibles, et Π_1, Π_2, Π_3 etc. désignant des fonctions elliptiques quelconques en nombre fini. J'ai fait le premier pas vers la solution de ce problème, en démontrant le théorème suivant:

"S'il est possible d'exprimer $\int y dx$ comme on vient de le dire, on pourra toujours donner à son expression la forme suivante:

$$\int y dx = t + A_1 \log t_1 + A_2 \log t_2 + \ldots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \ldots,$$

où $t, t_1, t_2, \ldots y_1, y_2, y_3, \ldots$ sont toutes des fonctions *rationnelles* de x et y; mais en conservant à la fonction y toute sa généralité, j'ai été arrêté là par des difficultés qui surpassent mes forces et que je ne vaincrai jamais. Je me suis donc contenté de quelques cas particuliers, surtout de celui où y est de là forme $\frac{r}{\sqrt{R}}$, r et R étant deux fonctions rationnelles quelconques de x. Celà est déjà très général. J'ai reconnu qu'on pourra mettre l'intégrale $\int \frac{r dx}{\sqrt{R}}$ sous cette forme:

$$\int \frac{r dx}{\sqrt{R}} = p\sqrt{R} + A' \log\left(\frac{p' + \sqrt{R}}{p' - \sqrt{R}}\right) + A'' \log\left(\frac{p'' + \sqrt{R}}{p'' - \sqrt{R}}\right) + \ldots$$
$$\ldots + B_1 \Pi_1(y_1) + B_2 \Pi_2(y_2) + B_3 \Pi_3(y_3) + \ldots$$

où toutes les quantités $y_1, y_2, y_3, \ldots p, p', p'', \ldots$ sont des fonctions *rationnelles* de la variable x."

J'ai démontré ce théorème dans le mémoire sur les fonctions elliptiques qui va être imprimé dans le journal de Mr. *Crelle* *). Il m'a été extrêmement

*) Le dernier mémoire du tome I d. c. éd.

utile pour donner la généralité la plus grande possible à la théorie de la transformation. Savoir, j'ai non seulement comparé entre elles deux fonctions, mais un nombre quelconque de fonctions. Je suis conduit à ce résultat remarquable:

Si l'on a entre un nombre quelconque de fonctions elliptiques des trois espèces avec les modules c, c', c'', c''', ... une relation quelconque de la forme:

$$A\Pi(x)+A'\Pi_1(x_1)+A''\Pi_2(x_2)+A'''\Pi_3(x_3)+\ldots+A^{(n)}\Pi_n(x_n)=v,$$

où x_1, x_2, x_3, ... x_n sont des variables liées entre elles par un nombre quelconque d'équation algébriques, et v une expression algébrique et logarithmique: les modules c', c'', c''', ... doivent être tels qu'on puisse satisfaire aux équations:

$$\frac{dx}{\sqrt{[(1-x^2)(1-c^2x^2)]}}=a'\frac{dx'}{\sqrt{[(1-x'^2)(1-c'^2x'^2)]}}=a''\frac{dx''}{\sqrt{[(1-x''^2)(1-c''^2x''^2)]}}=\text{etc.}$$

en mettant pour x', x'', x''', ... des fonctions *rationnelles* de x; a', a'', ... étant des constantes. Ce théorème réduit la théorie générale des fonction elliptiques à celle de la transformation d'une fonction en une autre.

Ne soyez pas fâché, Monsieur, que j'ai osé vous présenter encore une fois quelques unes de mes découvertes. Si vous me permettrez de vous écrire, je désirerais bien de vous communiquer un bon nombre d'autres, tant sur les fonctions elliptiques et les fonctions plus générales, que sur la théorie des équations algébriques. J'ai été assez heureux de trouver une règle sûre à l'aide de laquelle on pourra reconnaître si une équation quelconque proposée est résoluble à l'aide de *radicaux* ou non. Un corollaire de ma théorie fait voir que généralement il est *impossible* de résoudre les équations supérieures au quatrième degré.

Agréez etc.

Christiania, le 25 novembre 1828.

XXV.

Extraits de quelques lettres de l'auteur à l'éditeur.

Copenhague le 24 juin 1823 *).

J'ai cherché à démontrer l'impossibilité de l'équation

$$a^n = b^n + c^n$$

en nombres entiers, lorsque n est plus grand que 2, mais je ne suis parvenu qu'aux théorèmes suivants, qui sont assez-curieux.

Théorème I.

L'équation $a^n = b^n + c^n$, où n est un nombre premier, est impossible, lorsqu'une ou plusieurs des quantités a, b, c, $a+b$, $a+c$, $b-c$, $\sqrt[m]{a}$, $\sqrt[m]{b}$, $\sqrt[m]{c}$ sont des nombres premiers.

Théorème II.

Si on a

$$a^n = b^n + c^n,$$

chacune des quantités a, b, c sera toujours résoluble en deux facteurs, premiers entre eux, de manière qu'en posant $a = \alpha . a'$, $b = \beta . b'$, $c = \gamma . c'$, l'un des 5 cas suivants aura lieu:

1. $a = \dfrac{a'^n + b'^n + c'^n}{2}$, $b = \dfrac{a'^n + b'^n - c'^n}{2}$, $c = \dfrac{a'^n + c'^n - b'^n}{2}$.

2. $a = \dfrac{n^{n-1} . a'^n + b'^n + c'^n}{2}$, $b = \dfrac{n^{n-1} . a'^n + b'^n - c'^n}{2}$, $c = \dfrac{n^{n-1} . a'^n + c'^n - b'^n}{2}$.

3. $a = \dfrac{a'^n + n^{n-1} . b'^n + c'^n}{2}$, $b = \dfrac{a'^n + n^{n-1} . b'^n - c'^n}{2}$, $c = \dfrac{a'^n + c'^n - n^{n-1} . c'^n}{2}$.

4. $a = \dfrac{n^{n-1} . (a'^n + b'^n) + c'^n}{2}$, $b = \dfrac{n^{n-1}(a'^n + b'^n) - c'^n}{2}$, $c = \dfrac{n^{n-1}(a'^n - b'^n) + c'^n}{2}$.

5. $a = \dfrac{a'^n + n^{n-1}(b'^n + c'^n)}{2}$, $b = \dfrac{a'^n + n^{n-1}(b'^n - c'^n)}{2}$, $c = \dfrac{a'^n - n^{n-1}(b'^n - c'^n)}{2}$.

---

*) En 1823 notre auteur passa quelques mois à Copenhague.

Théorème III.

Pour que l'équation $a^n = b^n + c^n$ soit possible, il faut que a ait une des trois formes suivantes:

$$1. \quad a = \frac{x^n + y^n + z^n}{2},$$

$$2. \quad a = \frac{x^n + y^n + n^{n-1} \cdot z^n}{2},$$

$$3. \quad a = \frac{x^n + n^{n-1}(y^n + z^n)}{2},$$

où x, y et z n'ont pas de facteurs communs.

Théorème IV.

La quantité a ne peut pas être moindre que $\frac{9^n + 5^n + 4^n}{2}$, et la plus petite des quantités a, b, c ne peut pas être moindre que $\frac{9^n - 5^n + 4^n}{2}$. Si par exemple $n = 7$, la plus petite valeur de c est

$$c = \frac{9^7 - 5^7 + 4^7}{2} = \frac{4782969 - 78125 + 16384}{2};$$

c'est-à-dire $c = 2360614$,

et dans ce cas $b = 2422355$,

$a = 2438739$;

mais ces valeurs ne satisfont pas à l'équation.

Berlin le 16 janvier 1826.

Depuis mon arrivée à Berlin je me suis aussi occupé de la solution du problème général suivant: *Trouver toutes les équations qui sont résolubles algébriquement.* Je ne l'ai pas encore achevé, mais autant que j'en puis juger, il réussira. Tant que le degré de l'équation est un nombre premier, la difficulté n'est pas si grande, mais lorsque ce nombre est composé, le diable s'y mêle. J'ai fait application aux équations du cinquième degré, et je suis heureusement parvenu à résoudre le problème dans ce cas. J'ai trouvé un grand nombre d'équations résolubles, outre celles qui sont connues jusqu'à présent. Lorsque j'aurai terminé le mémoire ainsi que je l'espère, je me flatte qu'il sera bon. Il sera général, et on y trouvera de la méthode, ce qui me semble le plus essentiel.

Un autre problème qui m'occupe beaucoup, c'est la sommation de la série

$$\cos mx + m.\cos(m-2)x + \frac{m(m-1)}{2}.\cos(m-4)x + \ldots$$

Lorsque m est un nombre entier positif, la somme de cette série est, comme on sait, $(2\cos x)^m$, mais lorsque m n'est pas un nombre entier, cela n'a plus lieu, à moins que x ne soit moindre que $\frac{\pi}{2}$. Il n'y a pas de problème qui ait plus occupé les mathématiciens, dans les derniers temps, que celui-là. *Poisson, Poinsot, Plana, Crelle* et un immense nombre d'autres ont cherché à le résoudre, et *Poinsot* est le premier qui ait trouvé une somme juste, mais son raisonnement n'est point rigoureux, et personne n'en est encore venu à bout. J'ai été assez heureux pour le démontrer rigoureusement.

J'ai trouvé

$$\cos mx + m.\cos(m-2)x + \ldots = (2+2\cos 2x)^{\frac{m}{2}}.\cos mk\pi$$

$$\sin mx + m.\sin(m-2)x + \ldots = (2+2\sin 2x)^{\frac{m}{2}}.\sin mk\pi.$$

m est une quantité comprise entre les limites -1 et $+\infty$, k est un entier, et x une quantité comprise entre les limites $(k-\frac{1}{2})\pi$ et $(k+\frac{1}{2})\pi$. Lorsque m est compris entre -1 et $-\infty$, les deux séries sont divergentes, et par conséquent elles n'ont pas de somme. Les séries divergentes sont en général quelque chose de bien fatal, et c'est une honte qu'on se soit avisé d'y fonder aucune démonstration. On peut démontrer tout ce qu'on veut en les employant, et ce sont elles qui ont fait tant de malheurs et qui ont enfanté tant de paradoxes. Peut-on imaginer rien de plus horrible que de débiter

$$0 = 1 - 2^n + 3^n - 4^n + \text{etc.}$$

où n est un nombre entier positif? Enfin mes yeux se sont dessillés d'une manière frappante, car à l'exception des cas les plus simples, par exemple les séries géométriques, il ne se trouve dans les mathématiques presque aucune série infinie dont la somme est déterminée d'une manière rigoureuse, c'est-à-dire, la partie la plus essentielle des mathématiques est sans fondement. Pour la plus grande partie les résultats sont justes, il est vrai, mais c'est là une chose bien étrange. Je m'occupe à en chercher la raison, problème très intéressant. Je ne crois que tu pourras me proposer qu'un très petit nombre de problèmes ou de théorèmes contenant des séries infinies, à la démonstration desquels je ne pourrais faire des objections bien fondées. Fais cela, et je te répondrai. Pas

même la formule binôme n'est encore rigoureusement démontrée. J'ai trouvé qu'on a

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}.x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs de m, lorsque x est moindre que l'unité. Lorsque x est égal à $+1$, la même formule a lieu, mais seulement si m est plus grand que -1, et lorsque x est égal à -1, la formule n'a lieu que pour des valeurs positives de m. Pour toutes les autres valeurs de x et de m, la série $1+mx$ + etc. est divergente. Le théorème de *Taylor*, base de tout le calcul infinitésimal, n'est pas mieux fondé. Je n'en ai trouvé qu'une seule démonstration rigoureuse, et celle-ci est de Mr. *Cauchy* dans son *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, où il a démontré qu'on aura

$$\varphi(x+\alpha) = \varphi x + \alpha.\varphi' x + \frac{\alpha^2}{2}.\varphi'' x + \ldots$$

tant que la série est convergente; mais on l'emploie à l'ordinaire sans façon dans tous les cas. Pour montrer par un exemple général *(sit venia verbo)* comment on raisonne mal, et combien il faut être sur ses gardes, je choisirai le suivant. Soit

$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \text{etc.}$$

une série infinie quelconque, tu sais qu'une manière très ordinaire pour en trouver la somme c'est de chercher la somme de celle-ci

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

et faire ensuite $x=1$ dans le résultat. Cela est bien juste, mais il me semble qu'on ne doit pas l'admettre sans démonstration; car quoiqu'on ait démontré que

$$\varphi x = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

pour toutes les valeurs de x qui sont inférieures à l'unité, il ne s'ensuit pas que la même chose ait lieu pour x égal à 1. Il serait bien possible que la série $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ s'approchât d'une quantité toute différente de $a_0 + a_1 + a_2 + \ldots$, lorsque x s'approche indéfiniment de l'unité. C'est ce qui est clair dans le cas général où la série est divergente; car alors elle n'a pas de somme. J'ai démontré que ce procédé est juste lorsque la série est convergente. L'exemple suivant montre comment on peut se tromper. On peut démontrer rigoureusement qu'on aura pour toutes les valeurs de x inférieures à π

$$\frac{x}{2} = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \text{etc.}$$

Il semble qu'on en pourrait conclure que la même formule aurait lieu pour $x = \pi$; mais cela donnerait

$$\frac{\pi}{2} = \sin \pi - \frac{1}{2} \sin 2\pi + \frac{1}{3} \sin 3\pi - \text{etc.} = 0,$$

résultat absurde. On peut trouver une infinité de pareils exemples.

La théorie des séries infinies en général est jusqu'à présent très mal fondée. On applique aux séries infinies toutes les opérations, comme si elles étaient finies; mais cela est-il bien permis? je crois que non. Où est il démontré qu'on obtient la différentielle d'une série infinie en en prenant la différentielle de chaque terme? Rien n'est plus facile que de donner des exemples où cela n'est pas juste; par exemple

$$\frac{x}{2} = \sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x - \text{etc.}$$

En différentiant on obtient

$$\frac{1}{2} = \cos x - \cos 2x + \cos 3x - \text{etc.}$$

résultat tout faux, car cette série est divergente

La même chose a lieu par rapport à la multiplication et à la division des séries infinies. J'ai commencé à examiner les règles les plus importantes qui (à présent) sont ordinairement approuvées à cet égard, et à montrer en quels cas elles sont justes ou non. Cela va assez bien et m'intéresse infiniment.

Paris le 24 octobre 1826.

Comme il me tarde d'avoir de tes nouvelles! tu ne saurais t'en faire idée. Ainsi donc ne va pas me tromper dans mon attente, fais moi parvenir quelques lignes consolatrices dans l'isolement où je me trouve, car, à te dire vrai, cette capitale la plus bruyante du continent me fait pour le moment l'effet d'un désert. Je ne connais presque personne, c'est que tout le monde va s'établir à la campagne, pendant la belle saison; ainsi ce monde n'est pas visible. Jusqu'à présent je n'ai fait connaissance qu'avec Mrs. *Legendre, Cauchy* et *Hachette,* et quelques mathématiciens moins célèbres quoique fort habiles, Mr. *Saigey* rédacteur du bulletin des sciences, et Mr. *Lejeune-Dirichlet,* Prussien qui vint me voir l'autre jour me croyant son compatriote. Il est mathématicien bien sagace. Il a prouvé avec Mr. *Legendre* l'impossibilité de résondre en nombres entiers l'équation $x^5 + y^5 = z^5$ et d'autres choses fort intéressantes. Mr. *Legendre* est un homme fort complaisant et prévenant, mais malheureusement fort vieux.

Mr. *Cauchy* est celui des mathématiciens qui sait le mieux comment les mathématiques pour le moment doivent être traitées. Il y a des choses excellentes, mais sa manière manque de clarté. Je ne le compris presque point d'abord, mais à présent je suis en train. Il fait publier une suite de mémoires sous titre *exercices de mathématiques*. Je les achète et je les lis assidument. Il en vient de paraitre 9 livraisons à partir du commencement de cette année. Mr. *Cauchy* est presque le seul qui s'occupe des mathématiques pures. Mrs. *Poisson, Fourier, Ampère* etc. etc. s'occupent presque exclusivement du magnétisme et d'autres objets physiques. Mr. *Laplace* n'ecrit plus, je pense. Son dernier ouvrage fut un supplément de sa théorie des probabilités. Je l'ai souvent vu à l'institut. Il est de moyenne stature, mais frais et vigoureux. Mr. *Lacroix* est fort avancé en âge. Lundi prochain Mr. *Hachette* va me présenter à plusieurs de ces messieurs.

Les Français sont beaucoup plus réservés avec les étrangers que les Allemands. Il est fort difficile de gagner leur intimité, et je n'ose pousser mes prétentions jusque là; enfin tout commençant a bien de la peine à se faire remarquer ici. Je viens de finir un grand traité sur une certaine classe de fonctions transcendantes pour le présenter à l'institut, ce qui aura lieu lundi prochain*). J'ose dire sans ostentation que c'est un traité dont on sera satisfait. Je suis curieux d'entendre l'opinion de l'institut là-dessus. Je ne manquerai pas de t'en faire part. J'en ai écrit plusieurs autres surtout pour le journal de Mr. *Crelle*, dont 3 livraisons ont paru. Un extrait de mon mémoire sur l'impossibilité de la résolution des équations algébriques a été inséré dans le bulletin de Mr. *Ferussac*. Je l'ai écrit moi-même, et je continuerai d'écrire de semblables articles pour ce bulletin. C'est une tâche bien ennuyante quand on n'a pas soi-même écrit le traité, mais enfin, c'est pour Mr. *Crelle*, l'homme le plus honnête du monde. J'entretiens avec lui une correspondance soutenue**). Ce qui m'occupe pour le moment c'est la

---

*) Voy. T. I. p. 288.

**) Voici un passage de la première lettre que notre auteur m'adressa de Berlin: "Je viens de faire" dit-il "une connaissance précieuse, celle de Mr. *Crelle*. Qu'il est aimable ce monsieur. Tu ne saurais jamais te faire idée du charme de sa conversation, prévenant sans afficher cette politesse hérissée et accablante dont bien des gens honnêtes d'ailleurs se font mérite. Enfin c'est l'homme qu'il me faut, l'homme sans façon; j'en use avec lui comme avec toi ou d'autres de mes plus intimes amis. Il s'applique aux mathématiques avec beaucoup d'assiduité, ce qui lui fait d'autant plus d'honneur qu'occupant une charge publique il n'a que peu de loisir. Depuis quelques

théorie des équations algébriques, mon thème favori, et me voilà déjà assez avancé pour trouver le moyen de résoudre le problème général que voici: *Déterminer la forme de toutes les équations algébriques qui sont résolubles algébriquement.* J'en ai trouvé un grand nombre du 5me 6me et 7me degré qu'on n'a pas flairé jusqu'à présent. J'ai en même temps la solution la plus directe des équations des 4 premiers degrés, avec la preuve la plus évidente pourquoi celles-ci sont les seules résolubles et non pas les autres. Quant à l'équation du 5me degré j'ai trouvé que quand une telle équation est résoluble algébriquement, il faut que la racine ait la forme suivante:

$$x = A + \sqrt[5]{R} + \sqrt[5]{R'} + \sqrt[5]{R''} + \sqrt[5]{R'''},$$

où R, R', R'', R''' sont les 4 racines d'une équation du 4me degré et qui sont exprimables par des racines carrées seules. Pour les expressions et les signes ce problème m'a présenté bien des difficultés. Du reste, la théorie des quantités imaginaires, qui laisse beaucoup à désirer, le calcul intégral, et surtout la théorie des séries infinies, qui est fort mal basée, me donnent assez de besogne. Cependant je ne puis m'attendre à en voir un résultat satisfaisant avant d'être installé chez moi à mon aise, si cela se réalise jamais. Je regrette d'avoir fixé deux ans pour mes voyages, un et demi en aurait suffisamment rempli le but. Le mal du pays me gagne de plus en plus, et d'ici en avant mon séjour ici ou partout ailleurs ne m'offre pas tant d'avantages que l'on serait porté à croire. Je suis maintenant au fait de tout ce que les mathématiques pures offrent de plus ou de moins essentiel, et il me tarde de pouvoir sacrifier exclusivement mon temps à rédiger ce que j'ai recueilli. Il me reste tant de choses à rédiger, mais tant que je serai en pays étranger, tout cela va assez mal. Ah que j'envie le sort de Mr. *Keilhau* par rapport à sa place de l'université. Ma position n'est pas assurée, il est vrai, mais je ne suis pas alarmé non plus; si la fortune m'abandonne d'une part elle me sourira peut-être de l'autre.

---

années il fait publier des livres de mathématiques que je trouve être très bien écrits. J'en possède un grand nombre, dont il m'a fait cadeau, savoir une traduction des oeuvres mathématiques de *Lagrange* avec des notes excellentes, Theorie der analytischen Facultäten (Cet ouvrage se trouve à la bibliothèque de l'universite de Christiania, si tu ne l'as pas lu il faut absolument que tu le fasse; c'est un ouvrage supérieur à différents égards surtout par rapport à la méthode.) Lehrbuch der Arithmetik und Algebra, Lehrbuch der Geometrie 3 vol. En outre j'ai fait l'acquisition de son "Darstellung der

Paris le*) décembre 1826.

Tu m'apprends que tu as lu les deux premiers cahiers du journal de Mr. *Crelle*. Les mémoires que j'y ai fait insérér, à l'exception de celui des équations, ne valent pas grand'chose, mais cela viendra, je t'en assure. J'espère que tu seras satisfait d'un mémoire sur une intégrale qui se trouve dans le troisième cahier**); mais celui qui me donne la plus grande satisfaction, c'est un mémoire actuellement sous presse pour le 4me cahier sur la simple série $1+mx+\frac{m(m-1)}{2}x^2+\ldots$***). J'ose dire que c'est la première démonstration rigoureuse de la formule binome dans tous les cas possibles, comme aussi d'un grand nombre d'autres formules, connues, il est vrai, mais très mal basées. J'ai écrit un grand mémoire sur les fonctions elliptiques qui renferme des choses assez curieuses et qui ne manquera pas, je m'en flatte, de fixer l'attention du monde littéraire. Entre autres choses il traite de la division de l'arc de la lemniscate. Ah, qu'il est magnifique! tu verras. J'ai trouvé qu'avec le compas et la règle on peut diviser la lemniscate en 2^n+1 parties égales, lorsque ce nombre 2^n+1 est premier. La division dépend d'une équation du degré $(2^n+1)^2-1$; mais j'en ai trouvé la solution complète à l'aide des racines carrées. Cela m'a fait pénétrer en même temps le mystère qui a enveloppé la théorie de Mr. *Gauss* sur la division de la circonférence du cercle. Je vois clair comme le jour, comment il y est parvenu. Voilà des fruits de mes recherches dans la théorie des équations algébriques. Tu ne saurais jamais t'imaginer combien j'y ai trouvé de théorèmes magnifiques, par exemple si une équation $P=0$, dont le degré est $\mu\nu$, μ et ν étant des nombres premiers entre eux, est résoluble par des radicaux, ou P sera décomposable en μ facteurs du degré ν, dont les coefficiens dépendent d'une seule équation du degré μ, ou bien en ν facteurs du degré μ, dont les coefficiens dépendent d'une seule équation du degré ν.

Rechnung mit veränderlichen Grössen", comme je vais faire l'acquisition de plusieurs autres traités qu'il a fait publier. Tous les lundis je passe la soirée chez Mr. *Crelle*, et chaque vendredi à l'heure du midi nous allons à la promenade ensemble pendant quelques heures, et alors nous nous lançons dans les mathématiques aussi rapidement que le permet mon organe encore peu tudesque."

*) Cette lettre est sans date.

**) Le mémoire VI T. I de cette édition.

***) Le mém. VII T. I d. c. éd.

Berlin le 4 mars 1827.

Il y a un mois environ que je t'ai fait parvenir avec Mr. *P.* le 3[me] cahier du journal de Mr. *Crelle* et un peu plus de la moitié du 4[me] qui sort de la presse. Que penses-tu de mon mémoire qui s'y trouve inséré*). J'ai taché d'être tellement rigoureux qu'il sera impossible d'y faire aucune objection fondée. ... Dans la théorie des équations je me suis proposé de résoudre le problème suivant, qui renferme tous les autres: *Trouver toutes les équations d'un degré déterminé qui sont résolubles algébriquement.* Cela m'a valu une foule de théorèmes bien intéressants. Mais voici le mémoire qui l'emporte sur tous les autres: *Théorie des fonctions transcendantes en général et celle des fonctions elliptiques en particulier;* mais différons de t'en faire part jusqu'à mon retour. Enfin j'ai fait un grand nombre de découvertes Encore si j'en eusse rassemblé les parties dipersées qui flottent encore en se heurtant dans ma tête, où pour la plus grande partie elles restent encore enfermées. Il est impossible de penser à rien avant mon retour. Mais alors mes pensées trotteront comme une haridelle de fiacre, mais avec plaisir s'entend. Il me tard maintenant d'être installé chez moi, comme je ne vois pas de grand profit à prolonger mon séjour ici. Chez soi on se fait souvent des illusions sur l'étranger. Ce monde est assez fade et insipide en général; mais après tout, il y a de l'honnêteté et de la bonhomie.

---

*) Le mémoire VII d. c. éd.

NOTES ET DÉVELOPPEMENTS
DE L'ÉDITEUR.

Pag. 21. **P**our l'expression de $\frac{dP}{dx}$, voyez *Lacroix* traité du calc. diff. et du calc. int. T. III p. 69.

Pag. 26. $$\cot\frac{\pi}{a} + \cot\frac{2\pi}{a} + \ldots \cot\frac{(a-1)\pi}{a} = 0$$

à cause de $$\cot\frac{m\pi}{a} = -\cot\frac{(a-m)\pi}{a}.$$

On a en général (voy. *Lacroix* traité du calc. diff. etc. T. III p. 89)

$$\sum_1^m{}_k \cos kx = \frac{\cos(m+1)\,.\,\frac{x}{2}\,.\sin\frac{mx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}.$$

Faisant ici $m = a - 1$, $x = \frac{2n\pi}{a}$, on trouvera

$$\sum_1^{a-1}{}_k \cos\frac{2kn\pi}{a} = -1.$$

Pag. 27. $\left(\sin\frac{\pi}{2a}.\sin\frac{2\pi}{2a}\ldots\sin\frac{(a-1)\pi}{2a}\right)^2 = \frac{a}{2^{2a-2}}$ (voy. *Lacroix* traité du calc. diff. etc. T. III p. 454).

Pag. 28. La valeur de la constante C'' se trouve plus aisément en faisant $x = \frac{1}{n}$; car on ne voit pas immédiatement que la différence des deux quantités infinies $L(n.0)$ et $\frac{1}{n}\,L(0)$ se réduise à zéro.

Pag. 31. Si dans la formule connue

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^1 \left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}.dx$$

on met x^{a-k} au lieu de x, on obtient

$$\int_0^1 x^{a-k-1}.\left(l\,\frac{1}{x}\right)^{\alpha-1}.dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{(a-k)^\alpha}.$$

Pag 33. L'expression de $L\left(\frac{m}{a}, \alpha\right)$ (ligne 10) se trouve en remarquant que

$$a^\alpha \int_0^1 \frac{y^{a-1}\, l\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y^a - 1} .dx = \int_0^1 \frac{l\left(\frac{1}{y}\right)^{\alpha-1}}{y-1},$$

équation qui résulte de la substitution de y pour y^a.

Pag. 46. Ayant $p = \frac{1}{e^v - 1}$, on trouve

$$\frac{dp}{dv} = -\frac{e^v}{(e^v-1)^2} = -\frac{1}{e^v-1} - \frac{1}{(e^v-1)^2} = -p - \frac{1}{(e^v-1)^2},$$

et de là

$$\frac{1}{(e^v-1)^2} = (-1)\left(p + \frac{dp}{dv}\right).$$

De même

$$\frac{d^2p}{dv^2} = -\frac{d(p+p^2)}{dv} = -\frac{dp}{dv} - \frac{2pdp}{dv} = p + 3p^2 + 2p^3;$$

donc $$2p^3 = -p - 3p^2 + \frac{d^2p}{dv^2}; \text{ or } p^2 = -p - \frac{dp}{dv};$$

donc en substituant en réduisant

$$p^3 = \frac{1}{(e^v-1)^3} = p + \tfrac{3}{2}\cdot\frac{dp}{dv} + \tfrac{1}{2}\frac{d^2p}{dv^2},$$

et ainsi de suite.

Pag. 47. On trouvera en général

$$\frac{d^{2m}p}{dv^{2m}} = \frac{\Gamma(2m+1)}{v^{2m+1}} + 2(-1)^m.\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2m}.dt.\sin vt}{e^{2\pi t}-1},$$

et $$\frac{d^{2m+1}p}{dv^{2m+1}} = -\frac{\Gamma(2m+2)}{v^{2m+2}} + 2(-1)^m.\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t^{2m+1}.dt.\cos vt}{e^{2\pi t}-1}.$$

Pag. 48. Il faut se rappeler que $A_{0,n} = 1$.

Pag. 49. La substitution de $\varphi(2x)$ pour $\varphi(x)$ donne

$$\Sigma\varphi(2x) = C + \int\varphi(2x)dx - \tfrac{1}{2}\varphi(2x) + 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\cdot\frac{\varphi(2x+2t\sqrt{-1}) - \varphi(2x-2t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

Or $\Sigma\varphi(2x) = 0$ et $\int\varphi(x)dx = 0$ pour $x = \frac{a}{2}$; donc

$$C = \tfrac{1}{2}\varphi a - 2\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt}{e^{2\pi t}-1}\cdot\frac{\varphi(a+2t\sqrt{-1}) - \varphi(a-2t\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}}.$$

En substituant cette valeur de C et ayant égard à la formule

$$\int_{\frac{a}{2}}^{\frac{1}{0}} \varphi(2x)dx = \tfrac{1}{2}\int_a^{\frac{1}{0}} \varphi x dx,$$

on trouvera le résultat de l'auteur.

Pag. 51. On trouvera $P = \frac{\psi' y}{2fy} - \frac{\psi y . f'y}{(fy)^2}$. Or d'après l'hypothèse fy ne s'évanouit pas, lorsque $\psi y = 0$; donc P reste finie pour cette valeur de ψy.

Pag. 52. Faisant

$2n(\alpha - \alpha_1) + 2n_1(\alpha - \alpha_2) \ldots + 2n_{m-1}(\alpha - \alpha_m) = 2\nu\alpha + 2\nu_1\alpha_1 \ldots + 2\nu_m\alpha_m$,

on en tire

$$\nu = n + n_1 + n_2 + \ldots + n_{m-1}$$
$$\nu_1 = - n$$
$$\nu_2 = - n_1$$
$$\ldots\ldots\ldots$$
$$\nu_m = - n_{m-1},$$ donc en ajoutant

$\nu + \nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_m = 0.$

Pag. 55. $$p = \frac{z}{q} = \frac{1}{\psi a} \cdot \int \frac{\psi x . dx}{x - a}.$$

On a $$R = \sum_1^\infty {}_\mu \left(\frac{\mu . \varphi^{(\mu+1)} a}{\Gamma(\mu + 2)} - \frac{f^{(\mu)} a}{\Gamma(\mu + 1)} \right) (x - a)^{\mu - 1};$$

or

$$\varphi^{(\mu+1)} a = \Gamma(\mu + 2) . \alpha_{\mu+1} + \Gamma(\mu + 3) . \alpha_{\mu+2} . a + \frac{\Gamma(\mu+4)}{\Gamma(3)} . \alpha_{\mu+3} . a^2 \ldots + \frac{\Gamma(\mu+1+k)}{\Gamma(k)} . \alpha_{\mu+k} \,.\, a^{k-1} + \ldots$$

$$f^{(\mu)} a = \Gamma(\mu + 1) . \beta_\mu + \Gamma(\mu + 2) . \beta_{\mu+1} . a + \frac{\Gamma(\mu+3)}{\Gamma(3)} . \beta_{\mu+2} . a^2 \ldots + \frac{\Gamma(\mu + k)}{\Gamma(k)} . \beta_{\mu+k-1} . a^{k-1} + \ldots$$

donc $$\frac{\mu . \varphi^{(\mu+1)} a}{\Gamma(\mu + 2)} = \frac{\mu}{\Gamma(\mu + 2)} . \sum_1^\infty {}_k \frac{\Gamma(\mu + 1 + k)}{\Gamma(k)} . \alpha_{\mu+k} . a^{k-1};$$

$$\frac{f^{(\mu)} a}{\Gamma(\mu + 1)} = \frac{1}{\Gamma(\mu + 1)} . \sum_1^\infty {}_k \frac{\Gamma(\mu + k)}{\Gamma(k)} . \beta_{\mu+k-1} . a^{k-1}.$$

On tire de là

$$R = \sum_1^\infty {}_\mu \left[\frac{(x - a)^{\mu-1}}{\Gamma(\mu + 1)} . \sum_1^\infty {}_k \left(\frac{\mu}{\mu + 1} . \Gamma(\mu + 1 + k) . \alpha_{\mu+k} - \Gamma(\mu + k) . \beta_{\mu+k-1} \right) \frac{a^{k-1}}{\Gamma(k)} \right].$$

Il est clair qu'en faisant

$$\frac{(\mu + 1)\varphi^{(\mu+2)} a}{\Gamma(\mu + 3)} - \frac{f^{(\mu+1)} a}{\Gamma(\mu + 2)} = F(\mu),$$

les termes de R qui contiennent x^n sont compris dans les suivants

$F(n) . (x - a)^n + F(n + 1) . (x - a)^{n+1} + F(n + 2) . (x - a)^{n+2} \ldots + F(n + p) . (x - a)^{n+p} \ldots$

Il s'agit maintenant parmi ces fonctions de séparer celles qui sont multipliées par $a^m . x^n$.

Or la somme des fonctions multipliées par x^n est

$$F(n)+(n+1).F(n+1).(-a)+\frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}.F(n+2).(-a)^2\ldots+\frac{\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(p+1)}.F(n+p).(-a)^p\ldots$$

Maintenant on a

$$F(\mu)=\sum_1^\infty{}_k\left(\frac{(\mu+1).\Gamma(\mu+2+k)}{\Gamma(\mu+3).\Gamma(k)}.\alpha_{\mu+k+1}-\frac{\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+2).\Gamma(k)}.\beta_{\mu+k}\right)a^{k-1}.$$

Donc faisant pour abréger

$$\frac{(\mu+1).\Gamma(\mu+2+k)}{\Gamma(\mu+3).\Gamma(k)}.\alpha_{\mu+k+1}-\frac{\Gamma(\mu+k+1)}{\Gamma(\mu+2).\Gamma(k)}.\beta_{\mu+k}=\chi(\mu,k),$$

on verra que la somme des fonctions multipliées par $a^m x^n$ sera la suivante

$$\chi(n,m+1)-(n+1).\chi(n+1,m)+\frac{(n+1)(n+2)}{1\ .\ 2}.\chi(n+2,m-1)\ldots$$
$$+\frac{(-1)^p\,\Gamma(n+p+1)}{\Gamma(n+1).\Gamma(p+1)}.\chi(n+p,m-p+1)\ldots$$

Or

$$\chi(n+p,m-p+1)=\frac{(n+p+1).\Gamma(m+n+3)}{\Gamma(m-p+1).\Gamma(n+p+3)}.\alpha_{m+n+2}-\frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(m-p+1).\Gamma(n+p+2)}.\beta_{m+n+1}.$$

On conclut de là, en remarquant que $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$, que le coefficient de $a^m x^n$ est celui-ci:

$$\frac{\Gamma(m+n+3)}{\Gamma(n+1)}.\alpha_{m+n+2}\sum_0^m{}_p\frac{(-1)^p}{(n+p+2)\Gamma(p+1).\Gamma(m-p+1)}-\frac{\Gamma(m+n+2)}{\Gamma(n+1)}.\beta_{m+n+1}\sum_0^m{}_p\frac{(-1)^p}{(n+p+1)\Gamma(p+1).\Gamma(m-p+1)}.(a)$$

En développant on aura

$$\sum_0^m{}_p\frac{(-1)^p}{(n+p+1)\Gamma(p+1).\Gamma(m-p+1)}=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{n+2}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n+3}-\ldots\pm\frac{1}{n+m+1}\right).$$

Or

$$x^n(1-x)^m=x^n\left(1-mx+\frac{m(m-1)}{1.2}x^2-\frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3+\ldots\pm x^m\right).$$

Multipliant par dx et prenant l'intégrale depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, on aura

$$\int_0^1 x^n(1-x)^m.dx=\frac{1}{n+1}-\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{n+2}+\frac{m(m-1)}{1.2}\cdot\frac{1}{n+3}-\ldots\pm\frac{1}{n+m+1}.$$

Par conséquent.

$$\sum_0^m{}_p\frac{(-1)^p}{(n+p+1)\Gamma(p+1).\Gamma(m-p+1)}=\frac{1}{\Gamma(m+1)}\int_0^1 x^n.(1-x)^m.dx;$$

mais
$$\int_0^1 x^n(1-x)^m.dx=\frac{\Gamma(m+1).\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}.$$

Donc
$$\sum_0^m{}_p\frac{(-1)^p}{(n+p+1)\Gamma(p+1).\Gamma(m-p+1)}=\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(m+n+2)}\ \ldots\ldots\ldots\ (b)$$

Mettant ici $n+1$ à la place de n, il vient

$$\sum_0^m{}_p \frac{(-1)^p}{(n+p+2)\Gamma(p+1).\Gamma(m-p+1)} = \frac{\Gamma(n+2)}{\Gamma(m+n+3)} \ldots\ldots\ldots (c)$$

En vertu des formules (b) et (c), l'expression (a) deviendra

$$(n+1)\alpha_{m+n+2} - \beta_{m+n+1},$$

qui par suite est la valeur de $A_{m,n}$ comme le dit l'auteur.

Pag. 56. $\frac{fx}{\varphi x}$ étant une fonction rationnelle, est résoluble en termes de la forme Ax^m et $\frac{B}{(x-\delta)^n}$; donc $\int\frac{fx}{\varphi x}dx$ est exprimable par des fonctions de la forme Cx^μ, $\frac{D}{(x-\delta)^\nu}$ et $m\log(x-\delta) = \log(x-\delta)^m$; donc

$$\psi x = e^{-\int\frac{fx}{\varphi x}.dx} = e^{-\Sigma[cx^\mu + D(x-\delta)^{-\nu}]}.e^{-\Sigma[\log(x-\delta)^m]} = \frac{e^p}{(x-\delta)^m.(x-\delta)^{m_1}\ldots}.$$

Si le degré de fx est moindre que celui de φx, on a $C=0$; si φx n'a pas de facteurs égaux on a $D=0$; donc dans ce cas $p=0$, $e^p=1$, $\frac{fx}{\varphi x} = \frac{m}{x-\delta} + \frac{m_1}{x-\delta_1}\ldots + \frac{m_\mu}{x-\delta_\mu}\ldots$, où $m_\mu = \frac{fx}{\varphi' x}$ pour $x=\delta_\mu$; donc $m_\mu = \frac{\beta+\beta_1.\delta_\mu+\beta_2.\delta_\mu^2+\ldots}{\alpha_1+2\alpha_2\delta_\mu+3\alpha_3\delta_\mu^2+\ldots}$. On voit par là qu'il n'est pas une suite nécessaire de l'équation $y.fx+\varphi x.\frac{dy}{\varphi x}=0$, que les quantités $m, m_1,\ldots$ soient positives et moindres que l'unité. Mais on peut toujours déterminer les fonctions fx et φx de manière que cette condition soit remplie. Et, lorsque $p=0$, il est nécessaire que cette condition soit remplie, si l'on veut que la fonction $\psi x.\varphi x$ s'évanouisse pour les mêmes valeurs de x qu'il faut donner à a, lorsque $\frac{1}{\psi a}$ doit s'évanouir. En effet, lorsque $p=0$, on a

$$\psi x.\varphi x = (x-\delta)^{1-m}.(x-\delta_1)^{1-m_1}\ldots$$

$$\frac{1}{\psi a} = (a-\delta)^m.(a-\delta_1)^{m_1}\ldots,$$

d'où l'on voit qu'il est impossible que ces deux fonctions s'évanouissent pour les mêmes valeurs de x et de a à moins que les quantités $m, m_1,\ldots$ ne soient positives et moindres que l'unité.

Pag. 59. Ayant $s_\mu = s'_\mu + (x-a)R$, si l'on fait $s_\mu = \chi(x)$, on aura en faisant $x=a$, $\chi(a) = s'_\mu$.

Pag. 60. Dans l'équation

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3 + \dots + c_m y_m$$

qui est l'intégrale complète de l'équation (1), les quantités $y_1, y_2, \dots y_m$ sont des valeurs particulières de y qui satisfont à l'équation (1), et $c_1, c_2, \dots c_m$ des constantes arbitraires. (Voy. *Lacroix* traité du calc. diff. etc. T. II p. 525 et suiv.).

On voit que y'_μ est la même fonction de a que y_μ l'est de x, en comparant les équations (1) et (5) et en remarquant que s'_μ est la même fonction de a que s_μ l'est de x.

Pag. 62. On a $\quad \chi = vy + s_2 t . \frac{dy}{dx}$,

$$v = s_1 t - \frac{d(s_2 t)}{dx} = \frac{s_1}{x-a} - \frac{ds_2}{dx} . \frac{1}{x-a} + \frac{s_2}{(x-a)^2};$$

donc

$$\chi = \left(s_1 - \frac{ds_2}{dx}\right) . \frac{y}{x-a} + \frac{s_2 y}{(x-a)^2} + s_2 . \frac{dy}{dx} . \frac{1}{x-a} = \left[\left(s_1 - \frac{ds_2}{dx}\right) y + s_2 . \frac{dy}{dx}\right] . \frac{1}{x-a} + \frac{ys_2}{(x-a)^2},$$

et par conséquent

$$p = \left(s_1 - \frac{ds_2}{dx}\right) y + s_2 . \frac{dy}{dx}, \; q = ys_2.$$

Pag. 63. $s_1 = 0$ et $s_2 = 0$ pour $x = x_1$ et $x = x_0$ rend $p_1 = 0$, $p_0 = 0$, $q_1 = 0$ et $q_0 = 0$.

$\beta z + \gamma . \frac{dz}{da} = \int \varrho y dx + \int r y dx$. En mettant dans cette équation pour β sa valeur $-\varepsilon\gamma$ et χ pour $\int r y dx$ on a

Pag. 65. $\quad -\gamma\left(\varepsilon z - \frac{dz}{da}\right) = \int \varrho y dx + \chi.$

Pag. 66. Voyez le mémoire XV p. 288 et le mémoire XX p. 324 du premier tome. Le dernier des deux mémoires cités n'est qu'un extrait abrégé de ce mémoire XI.

Pag. 67. Les quantités $R, R_1, R_2 \dots$ étant des fonctions symétriques des racines de l'équation $s = 0$ sont des fonctions rationnelles des coefficiens de cette équation.

Pag. 72. Lorsque $m = 1$, c'est-à-dire $y = \frac{1}{x-\alpha}$, on a $\int y dx = \log(x-\alpha) = \psi x$. Donc

$$\log(x_1 - \alpha) + \log(x_2 - \alpha) + \dots + \log(x_n - \alpha) = -\int (P_1^{(0)} da + P_1^{(1)} da_1 + P_1^{(n-1)} da_{n-1}),$$

où

$$P_1^{(k)} = -\frac{1}{da_k} . d\log(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha)\dots(x_n - \alpha) = -\frac{1}{da_k} . \frac{dt}{t}.$$

Pag. 75. De l'équation

$$ydx = \frac{\alpha.(da + x.da_1 + x^2.da_2 + \ldots + x^{\mu-1}.da_{\mu-1})}{\left(\frac{ds}{dx}\right)},$$

qui donne

$$\psi x_1 + \psi x_2 + \ldots + \psi x_n = \varrho,$$

on tire aisément en faisant $\alpha = \chi x$ et $s = \varphi x$:

$$d\varrho = \sum_0^n {}_m\left(\frac{x_1{}^m.\chi x_1}{\varphi' x_1} + \frac{x_2{}^m.\chi x_2}{\varphi' x_2} + \ldots + \frac{x_n{}^m.\chi x_n}{\varphi' x_n}\right).$$

Soit maintenant $\chi x = \gamma + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_p x^p = \sum_0^p {}_\mu \gamma_\mu x^\mu$, on aura en substituant

$$d\varrho = \sum_0^n {}_m \sum_0^p {}_\mu \gamma_\mu.\left(\frac{x_1{}^{m+\mu}}{\varphi' x_1} + \frac{x_2{}^{m+\mu}}{\varphi' x_2} + \ldots + \frac{x_n{}^{m+\mu}}{\varphi' x_n}\right).$$

Or l'équation (28) pag. 76 fait voir que, si le degré de α est moindre que celui de α_1, $d\varrho$ s'évanouit et par suite ϱ se réduit à une constante.

Dans l'équation

$$x^{\mu+1} + a_{\mu-1}.x^\mu + \ldots + ax + \delta = 0,$$

la quantité $(-1)^{\mu+1}.\delta$ est égale au produit des racines.

Pag. 76. Mr. *Cauchy* dans son cours d'analyse de l'école roy. polyt. p. 92 a donné une démonstration élémentaire des deux formules (28) et (29).

Pag. 77. Le titre du mémoire XII est ajouté par l'éditeur, car dans le cahier de l'auteur il se trouve sans titre. Ce mémoire contient une extension de la théorie dont l'auteur a fait usage dans le mémoire VII.

Pag. 80. $y^n = \Sigma A_m z^m$, c'est-à-dire $(e^{v\alpha_1} + a_1)^n = \Sigma A_m(e^{v\alpha} + a)^m$, donc $(e^{v\alpha_1} + a_1)^n.fv = \Sigma A_m(e^{v\alpha} + a)^m.fv$, donc $\delta_1{}^n\varphi x = \Sigma A_m \delta^m \varphi x$.

Pag. 82. $(x + \alpha)^m = x^m + \frac{m}{1}\alpha(x + \beta)^{m-1} + \text{etc.}$ Voilà la formule donnée par l'auteur dans le mémoire V T. I p. 51. On voit ici le chemin direct qui a conduit l'auteur à cette formule.

Pag. 85. Lorsque x est compris entre les limites π et $-\pi$ on a (voy. T. I p. 90)

$$\frac{x}{2} = \sin x - \tfrac{1}{2}\sin 2x + \tfrac{1}{3}\sin 3x - \ldots$$

En prenant la dérivée de chaque terme du second membre de cette équation on obtient la série

$$\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cos 4x + \ldots$$

Or cette série étant divergente pour toute valeur de x, elle n'a pas de somme, et par conséquent elle n'est pas égale à la dérivée du premier membre de l'équation, donc l'équation

$$\tfrac{1}{2} = \cos(\alpha v) - \cos(2\alpha v) + \cos(3\alpha v) - \dots$$

n'est pas juste, ce que l'auteur a reconnu plus tard. Voyez pag. 268 de ce volume.

$$D.\delta\varphi x = \psi v . f v = \int f v . f(v_1 t) dt = \int D . \delta_1 \varphi x . dt.$$

$$(e^{v\alpha} - 1)^{-1} - (v\alpha)^{-1} + \tfrac{1}{2} = 2 \int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt . \sin(v\alpha t)}{e^{2\pi t} - 1} \text{ (voy. p. 46).}$$

Pag. 86. Pour la valeur de $\frac{d^n(e^x \varphi x)}{dx^n}$ voyez pag. 84.

Pag. 88. L'intégrale $\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{dt . \sin at}{t(1+t^2)} = \frac{\pi}{2}(1 - e^{-a})$ voy. *Legendre* exerc. d. calc. int. T. I p. 360, et l'intégrale

$$\int_0^{\frac{1}{0}} \frac{t dt . \sin at}{1+t^2} = \frac{\pi}{2} . e^{-a}$$

est la formule (2) pag. 358 de l'ouvrage cité en y faisant $m = 1$.

Pag. 91. La formule $\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2^n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi)^n . \cos n\varphi . d\varphi$ est démontrée pag. 88.

Pag. 97. Faisant $\delta = \varepsilon_1$, $\gamma = \varepsilon_2$, $\beta = \varepsilon_3$, $\alpha = \varepsilon_4$, l'équation (a) donne, lorsque $\varphi(p) = 0$, et en écrivant $m - p + 3$ au lieu de p:

$$\left.\begin{aligned} -f(m-p) = &\frac{m-p+4}{m-p+2} \cdot \frac{\varepsilon_4}{\varepsilon} . f(m-p+4) + \frac{m-p+\frac{7}{2}}{m-p+2} \cdot \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon} . f(m-p+3) \\ &+ \frac{m-p+3}{m-p+2} \cdot \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon} . f(m-p+2) + \frac{m-p+\frac{5}{2}}{m-p+2} \cdot \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon} . f(m-p+1) \end{aligned}\right\} \dots (a')$$

De cette équation et des expressions de $f(m-4)$, $f(m-5)$, $f(m-6)$ et $f(m-7)$ on verra sans peine que dans l'expression développée de $f(m-p)$, ε se trouvera dans le dénominateur de chaque terme dans une certaine puissance, que, si p a les valeurs $4q$, $4q+1$, $4q+2$, $4q+3$, l'exposant de ε aura toutes les valeurs entières comprises respectivement entre les limites $q+1$ et $4q-2$, $q+1$ et $4q-1$, $q+1$ et $4q$, $q+1$ et $4q+1$. Soit $n+3$ l'exposant de ε, il s'ensuit que pour toute valeur de p, n aura toutes les valeurs entières depuis le plus grand nombre entier compris dans $\frac{p}{4} - 2$ jusqu'à $p - 5$.

Soit par exemple $p = 8$, n aura les valeurs, 0, 1, 2, 3, donc $n + 3$ les valeurs 3, 4, 5, 6.

Lorsque $n = 0$, on aura $k^{(n)} = k$ qui aura les valeurs 2, 3, 4, 5.

Lorsque $n = 1$, les deux quantités k et $k^{(1)}$ auront les valeurs suivantes

k	$k^{(1)}$
2	3
2	4
3	4
2	5
3	5
4	5.

Lorsque $n = 2$, les trois quantités k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$ auront les valeurs suivantes

k	$k^{(1)}$	$k^{(2)}$
2	3	4
2	3	5
2	4	5
3	4	5.

Lorsque $n = 3$, les quatre quantités k, $k^{(1)}$, $k^{(2)}$, $k^{(3)}$ auront respectivement les valeurs 2, 3, 4, 5.

Connaissant ces valeurs de n et de k, $k^{(1)}$ etc. on pourra immédiatement former l'expression de $f(m-8)$, qui, comme on voit, doit être composée de 15 termes.

Pag. 105. Dans l'expression (k) n aura toutes les valeurs entières depuis le plus grand nombre entier compris dans $\frac{p-1}{4} - 2$ jusqu'à $p-3$.

Pag. 108. Pour trouver les relations qui doivent exister entre les quantités $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(2)$ pour que l'expression

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$

soit réductible à des intégrales de la forme $\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}}$, la supposition la plus générale serait de faire

$$\varphi(0)\int\frac{dx}{\sqrt{R}} + \varphi(1)\int\frac{x\,dx}{\sqrt{R}} + \varphi(2)\int\frac{x^2\,dx}{\sqrt{R}}$$

$$= \begin{cases} A\int\frac{dx}{(x-a)\sqrt{R}} + A'\int\frac{dx}{(x-a')\sqrt{R}} + A''\int\frac{dx}{(x-a'')\sqrt{R}} + A'''\int\frac{dx}{(x-a''')\sqrt{R}} \\ + \sqrt{R}\left(\frac{B}{x-a} + \frac{B'}{x-a'} + \frac{B''}{x-a''} + \frac{B'''}{x-a'''}\right), \end{cases}$$

mais en vertu de l'équation (n) on peut chasser les deux dernières intégrales du second membre de cette équation, et par là, comme il est aisé de voir, les deux quantités $\frac{B''}{x-a''}$ et $\frac{B'''}{x-a'''}$ disparaîtront aussi.

Pag. 115. Lorsque $\mu = 2n+4$ et $m = n+2$, on aura

$$N = ax^{2n+4} + bx^{2n+3} + \dots, \quad \frac{dN}{dx} = (2n+4)ax^{2n+3} + (2n+3)bx^{2n+2} + \dots$$

$$P = Ax^{n+2} + Bx^{n+1} + \dots, \quad \frac{dP}{dx} = (n+2)Ax^{n+1} + (n+1)Bx^{n} + \dots$$

donc
$$\begin{aligned} 2N.\frac{dP}{dx} = 2(n+2)aAx^{3n+5} &+ 2(n+2)bAx^{3n+4} + \dots \\ &+ 2(n+1)aBx^{3n+4} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P.\frac{dN}{dx} = (2n+4)aAx^{3n+5} &+ (2n+4)aBx^{3n+4} + \dots \\ &+ (2n+3)bAx^{3n+4} + \dots \\ &+ \dots \end{aligned}$$

Donc le degré de M est dans ce cas $3n+4-n = 2n+4 = \mu$, et le degré de $\frac{M}{N} = 0$.

Pag. 125. Les deux expressions de f'' de la page **124** deviendront en y faisant $i = 1$ et $i' = i'' = -1$ et en réduisant:

$$\frac{(p-p'')(p'-p'').f''}{\sqrt{k}} = pp' - (p+p')p'' - p''^2 + 4p''a - 2a^2,$$

$$\frac{(p-p''')(p'-p''').f''}{\sqrt{k}} = pp' - (p+p')p''' - p'''^2 + 4p'''a - 2a^2.$$

La différence de ces deux équations donne

$$(p+p'-p''-p''').\frac{f''}{\sqrt{k}} = p+p'+p''+p'''-4a,$$

d'où l'on tire

$$f'' = \frac{p+p'+p''+p'''-4a}{p+p'-p''-p'''}.\sqrt{k}.$$

L'équation $2f'f''-\delta = -4ka$ (p. **125**) donne $f' = \frac{\delta - 4ka}{2f''}$; donc

$$f' = -\frac{p+p'+p''+p'''+4ka}{2\sqrt{(1+k)}}.$$

Soit pour abréger $p+p'-p''-p''' = \varkappa$, $p+p'+p''+p''' = \lambda$, on aura $k = \frac{\varkappa^2}{(\lambda-4a)^2-\varkappa^2}$; donc $\sqrt{(1+k)} = f'' = \frac{\lambda-4a}{\sqrt{[(\lambda+\varkappa-4a)(\lambda-\varkappa-4a)]}}$, et de

là $f' + 2af'' = \frac{-\lambda - 4ka}{2\sqrt{(1+k)}} + 2a\sqrt{(1+k)} = \frac{4a - \lambda}{2\sqrt{(1+k)}}$;

donc $2(f' + 2af'') = -2\sqrt{((p + p' - 2a)(p'' + p''' - 2a))} = \frac{1}{A}$.

Si dans l'équation

$$(f + f'x + f''x^2)^2 - (\alpha + \beta x + \gamma x^2 + \delta x^3 + \varepsilon x^4) = k(x - a)^4$$

on fait $x = a$, on a

$$(f + f'a + f''a^2)^2 = \varepsilon(a - p)(a - p')(a - p'')(a - p''').$$

Pag. 126. On a en général

$$\text{arc tg.}\left(\frac{p_1}{q_1}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log\left(\frac{q_1 + p_1\sqrt{-1}}{q_1 - p_1\sqrt{-1}}\right);$$

faisant donc $p_1 = \sqrt{R}$ $q_1 = P\sqrt{-1}$, on aura

$$\text{arc tg.}\left(\frac{\sqrt{R}}{P\sqrt{-1}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{-1}} . \log\left(\frac{P + \sqrt{R}}{P - \sqrt{R}}\right);$$

$$A = \frac{1}{2(p-p')\sqrt{-1}};$$

donc $$A . \log\left(\frac{P + \sqrt{R}}{P - \sqrt{R}}\right) = \frac{1}{p - p'} \text{ arc. tg.}\left(\frac{\sqrt{R}}{P\sqrt{-1}}\right).$$

Pag. 130. Lorsque dans l'équation

$$\frac{t}{S} = \frac{\mu}{x - a} + \frac{\mu'}{x - a'} + \frac{\mu''}{x - a''} + \frac{\mu'''}{x - a'''} + \dots$$

on multiplie les deux membres par le produit $(x - a)(x - a')(x - a'') \dots$, on obtient en faisant $x = a$

$$t = \mu(a - a')(a - a'')(a - a''') \dots$$

Pag. 131. La valeur de A se trouve en faisant x infini dans l'équation

$$\frac{M}{N} = A . \left(2\frac{dP}{dx} - \frac{Pt}{QS}\right)$$

et en remarquant que $h^{(m-1)} = 2n + 4$.

Pag. 132. La première formule de cette page est la même chose que la formule (28) pag. 76.

Pag. 133. On a

$$\left.\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{a.\psi a} + \frac{1}{a'\psi a'} + \frac{1}{a''\psi a''} + \frac{1}{a'''\psi a'''}\right) \\ &= \frac{i\sqrt{(\varphi a)}}{a.\psi a} + \frac{i'\sqrt{(\varphi a')}}{a'.\psi a'} + \frac{i''\sqrt{(\varphi a'')}}{a''\psi a''} + \frac{i'''\sqrt{(\varphi a''')}}{a'''\psi a'''} \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots (\alpha)$$

où $\psi a = (a - a')(a - a'')(a - a''')$, $\psi a' = (a' - a)(a' - a'')(a' - a''')$ etc.

Si dans la formule

$$A_0+A_1x+A_2x^2\ldots+A_{n-1}x^{n-1}=(A_0+A_1x_0+A_2x_0^2\ldots+A_{n-1}x_0^{n-1})\left(\frac{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\ldots(x_0-x_{n-1})}\right)$$
$$+(A_0+A_1x_1+A_2x_1^2\ldots+A_{n-1}x_1^{n-1})\left(\frac{(x-x_0)(x-x_2)\ldots(x-x_{n-1})}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\ldots(x_1-x_{n-1})}\right)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+(A_0+A_1x_{n-1}+\ldots\ldots+A_{n-1}x_{n-1}^{n-1})\left(\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{n-2})}{(x_{n-1}-x_0)(x_{n-1}-x_1)\ldots(x_{n-1}-x_{n-2})}\right),$$

qui se tire aisément de la formule d'interpolation de *Lagrange*, on compare entre eux les termes constants des deux membres, on aura

$$1=(-1)^{n-1}\left(\frac{x_1x_2x_3\ldots x_{n-1}}{\psi x_0}+\frac{x_0x_2\ldots x_{n-1}}{\psi x_1}+\ldots+\frac{x_0x_1\ldots x_{n-2}}{\psi x_{n-1}}\right).$$

On voit par là que

$$\frac{a'a''a'''}{\psi a}+\frac{aa''a'''}{\psi a'}+\frac{aa'a'''}{\psi a''}+\frac{aa'a''}{\psi a'''}=-1.$$

Donc en multipliant les deux membres de l'équation (α) ci-dessus par $aa'a''a'''$, on obtiendra l'expression de f.

En multipliant la première des équations qui déterminent f, $f^{(1)}$, $f^{(2)}$, par $\frac{a}{\psi a}$, la seconde par $\frac{a'}{\psi a'}$ etc. et ajoutant ensuite, on aura

$$f^{(2)}=\frac{ia\sqrt{(\varphi a)}}{\psi a}+\frac{i'a'\sqrt{(\varphi a')}}{\psi a'}+\frac{i''a''\sqrt{(\varphi a'')}}{\psi a''}+\frac{i'''a'''\sqrt{(\varphi a''')}}{\psi a'''},$$

mais en vertu de l'équation (9) on a

$$0=\frac{ia'''\sqrt{(\varphi a)}}{\psi a}+\frac{i'a'''\sqrt{(\varphi a')}}{\psi a'}+\frac{i''a'''\sqrt{(\varphi a'')}}{\psi a''}+\frac{i'''a'''\sqrt{(\varphi a''')}}{\psi a'''}.$$

La différence des deux dernières équations en y substituant les valeurs de ψa, $\psi a'$, $\psi a''$, $\psi a'''$ donne l'expression de $f^{(2)}$.

Pag. 156. Ayant

$$P=\sqrt{(R+C(x-a)^2(x-a')^2)}=f+f^{(1)}x+f^{(2)}x^2,$$
$$R=(x-p)(x-p')(x-p'')(x-p'''),$$

on aura en faisant $x=p, p', p'', p'''$,

$$f+f^{(1)}p+f^{(2)}p^2=i(p-a)(p-a')\sqrt{C}$$
$$f+f^{(1)}p'+f^{(2)}p'^2=i'(p'-a)(p'-a')\sqrt{C}$$
$$f+f^{(1)}p''+f^{(2)}p''^2=i''(p''-a)(p''-a')\sqrt{C}$$
$$f+f^{(1)}p'''+f^{(2)}p'''^2=i'''(p'''-a)(p'''-a')\sqrt{C}.$$

En éliminant f, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ de ces équations et réduisant, on aura

$$\frac{i(p-a)(p-a')}{(p-p')(p-p'')(p-p''')}+\frac{i'(p'-a)(p'-a')}{(p'-p)(p'-p'')(p'-p''')}+\frac{i''(p''-a)(p''-a')}{(p''-p)(p''-p')(p''-p''')}+\frac{i'''(p'''-a)(p'''-a')}{(p'''-p)(p'''-p')(p'''-p'')}=0.$$

Faisant ici $i=i'=1$ et $i''=i'''=-1$ on a la formule de l'auteur, exprimant la relation entre a et a'. On verra aisément que des quatre quantités i, i', i'', i''', il faut prendre deux $=1$ et les deux autres $=-1$, car toute autre supposition rend f, $f^{(1)}$ et $f^{(2)}$ infinis.

Pag. 145. En faisant $y=0$ et $\varepsilon=1$ après avoir différentié l'expression $\sqrt{(\varphi y)}$ cinq fois de suite on aura

$$c=1,\ c^{(1)}=\frac{\delta}{2},\ c^{(2)}=\gamma-\frac{\delta^2}{4},\ c^{(3)}=3\beta-\tfrac{3}{2}\gamma\delta+\tfrac{3}{8}\delta^3,$$

$$c^{(4)}=12\alpha-6\beta\delta-3\gamma^2+\tfrac{9}{2}\gamma\delta^2-\tfrac{15}{16}\delta^4,$$

$$c^{(5)}=-30\alpha\delta-30\beta\gamma+\tfrac{45}{2}\beta\delta^2+\tfrac{45}{2}\gamma^2\delta-\tfrac{75}{4}\gamma\delta^3+\tfrac{105}{32}\delta^5.$$

Pag. 146. Substituant dans les deux équations

$$c^{(1)}.c^{(4)}-2c^{(2)}.c^{(3)}=0,$$

$$2c^{(1)}.c^{(5)}-5c^{(2)}.c^{(4)}=0$$

les valeurs de $c^{(1)}$, $c^{(2)}$, etc. faisant $\beta=-\alpha$ et réduisant, on trouvera

$$2\alpha\delta+2\alpha\gamma+\tfrac{1}{2}\alpha\delta^2+\tfrac{1}{2}\gamma^2\delta+\tfrac{1}{4}\gamma\delta^3-\tfrac{3}{32}\delta^5=0,$$

$$-\alpha\delta^2-4\alpha\gamma+\gamma^3-\alpha\delta^3-\tfrac{1}{4}\gamma^2\delta^2-\tfrac{9}{16}\gamma\delta^4+\tfrac{9}{64}\delta^6=0.$$

On voit aisément que ces deux équations sont satisfaites en faisant $\delta=2$ et $\gamma=-3$.

Pag. 147. Des trois équations $Q=P'Q'$, $P=\frac{1}{2}(P'^2R'+Q'^2R'')$, $R=R'R''$ on tire successivement

$$\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}=\frac{\frac{1}{2}(P'^2R'+Q'^2R'')+P'Q'\sqrt{(R'R'')}}{\frac{1}{2}(P'^2R'+Q'^2R'')-P'Q'\sqrt{(R'R'')}},$$

$$\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}=\left(\frac{P'\sqrt{R'}+Q'\sqrt{R''}}{P'\sqrt{R'}-Q'\sqrt{R''}}\right)^2=\left(\frac{P'R'+Q'\sqrt{R}}{P'R'-Q'\sqrt{R}}\right)^2;$$

donc
$$\log\left(\frac{P+Q\sqrt{R}}{P-Q\sqrt{R}}\right)=2\log\left(\frac{P'R'+Q'\sqrt{R}}{P'R'-Q'\sqrt{R}}\right).$$

Pag. 149. La seconde méthode est la même que celle qui est employée dans le mémoire VI tome I pag. 33.

En désignant par la lettre δ le degré d'une fonction, on a $\delta Q_1<\delta Qr$, donc $\delta Q_1^2<\delta(QQ_1r)$, et par suite $\delta(Q_1^2+2QQ_1r)=\delta(QQ_1r)$; or l'équation $Q_1^2+2QQ_1r-Q^2s=1$, donne

$$\delta(Q_1^2+2QQ_1r)=2\delta Q+\delta s;$$

donc
$$\delta(QQ_1r)=\delta Q+\delta Q_1+\delta r=2\delta Q+\delta s;$$

c'est-à-dire $$n + \delta Q_1 + 2 = 2n + 1;$$
et de là $$\delta Q_1 = n - 1.$$

Pag. 150. L'équation $Q_1^2 + 2QQ_1u + Qs(2vQ_1 - Q) = 1$ donne
$$\delta(Q_1^2 + 2QQ_1u) = \delta(QQ_2s),$$
en remarquent que $$Q_2 = Q - 2vQ_1;$$
donc $$\delta Q + \delta Q_1 + \delta u = \delta Q + \delta Q_2 + \delta s;$$
c'est-à-dire $$n + n - 1 = n + \delta Q_2 + 1,$$
et par là $$n - 2 = \delta Q_2.$$
On a $$\delta(s_1Q_1Q_3) = \delta(Q_1Q_2u_1);$$
donc $$1 + n - 1 + \delta Q_3 = n - 1 + n - 2 = 2n - 3;$$
donc $$\delta Q_3 = n - 3.$$

Pag. 154. Ayant $r_m = x^2 + ax + b_m$ et $s_m = c_m + p_m x$, on doit avoir $r_m = (g_m + x) \cdot \frac{1}{p_m}$, en remarquant que $r_m = v_m s_m + u_m$.

Pag. 160. Soit par exemple $n = 4$ et $Q_4 = \text{const.} = 1$, on aura
$$Q_3 = \frac{2}{p_3}(x + g_3),$$
$$Q_2 = \frac{2}{p_2}(x + g_2)Q_3 + 1,$$
$$Q_1 = \frac{2}{p_1}(x + g_1)Q_2 + Q_3,$$
$$Q = \frac{2}{p}(x + g)\,Q_1 + Q_2;$$
donc en substituant
$$Q_2 = \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3}(x + g_2)(x + g_3) + 1$$
$$Q_1 = \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3}(x+g_1)(x+g_2)(x+g_3) + \frac{2}{p_1}(x+g_1) + \frac{2}{p_3}(x+g_3)$$
$$Q = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3}(x+g)(x+g_1)(x+g_2)(x+g_3) + \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1}(x+g)(x+g_1)$$
$$+ \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_3}(x+g)(x+g_3) + \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3}(x+g_2)(x+g_3) + 1.$$
Or $$Q = e + e^{(1)}x + e^{(2)}x^2 + e^{(3)}x^3 + e^{(4)}x^4.$$
En comparant entre elles ces deux expressions de Q, on en tire immédiatement

$$e^{(4)} = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3},$$

et

$$e^{(3)} = \frac{2}{p} \cdot \frac{2}{p_1} \cdot \frac{2}{p_2} \cdot \frac{2}{p_3} (g + g_1 + g_2 + g_3).$$

L'expression de $x + k$, voy. pag. 140.

Pag. 161. $A = \frac{1}{(2n+4)\sqrt{\varepsilon}} = \frac{1}{2n+4}$, lorsque $\varepsilon = 1$ (voy. pag. 141).

Pag. 166. Si dans l'équation $1 = (b^2 + c)(\alpha - \beta l + \gamma l^2 - \delta l^3 + l^4)$, (pag. 165) on met $-l$ au lieu de l, on en tirera

$$\sqrt{(b^2 + c)} = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + \beta l + \gamma l^2 + \delta l^3 + l^4)}} = \frac{1}{\sqrt{(\varphi l)}}.$$

Si dans le no. 45 on écrit l pour a on aura

$$k + l = -\mu A \sqrt{(\varphi l)}$$

et

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = \frac{1}{\mu A \sqrt{(\varphi l)}} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{\mu \sqrt{(\varphi l)}} . \log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right);$$

donc

$$\int \frac{dx}{(x-l)\sqrt{R}} = -\frac{1}{k+l} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{R}} - \frac{1}{\mu \sqrt{(\varphi l)}} . \log\left(\frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}\right).$$

Dans cette formule on a $\mu = 2n + 4$ en vertu de l'équation (1) pag. 127, en remarquant que $m = 1$.

Ayant $k + l = \frac{1}{k'}$, on a $\frac{A}{k+l} = Ak' = -A' = -\frac{1}{2n+4}$.

Pag. 170. On a

$$\int \frac{da}{(a-\omega)\sqrt{(fa)}} = \int \frac{(A + Ba) . da}{\sqrt{(fa)}} + w, \quad \dots\dots\dots\dots (\varepsilon)$$

et

$$\int \frac{dx}{(x-\omega')\sqrt{(fx)}} = \int \frac{(A' + B'x) . dx}{\sqrt{(fx)}} + w'. \quad \dots\dots\dots\dots (\zeta)$$

L'équation (ε) donne, en prenant l'intégrale depuis $a = r$ jusqu'à $a = \omega$ et multipliant ensuite par $\sqrt{(f\omega)}$:

$$\sqrt{(f\omega)} \int_r^{\omega} \frac{da}{(a-\omega)\sqrt{(fa)}} = \sqrt{(f\omega)} \int_r^{\omega} \frac{(A + Ba) . da}{\sqrt{(fa)}} + w\sqrt{(f\omega)}.$$

L'équation (ζ) donne de même

$$\sqrt{(f\omega')} \int_r^{\omega} \frac{dx}{(x-\omega')\sqrt{(fx)}} = \sqrt{(f\omega')} \int_r^{\omega} \frac{(A' + B'x) . dx}{\sqrt{(fx)}} + w'\sqrt{(f\omega')}.$$

En faisant $x = \omega$ et $a = \omega'$ dans la troisième équation de dessous pag. 169, on aura

$$\sqrt{(f\omega')} \int_r^{\omega} \frac{dx}{(x-\omega')\sqrt{(fx)}} = \sqrt{(f\omega)} . \int_r^{\omega'} \frac{(A + Ba) . da}{\sqrt{(fa)}} + w\sqrt{(f\omega)} + \text{etc.}$$

Mettant ici au lieu du premier membre sa valeur ci-dessus il viendra

$$\sqrt{(f\omega')}.\int_r^{\omega}\frac{(A'+B'x)dx}{\sqrt{(fx)}}+w'\sqrt{(f\omega')}=\sqrt{(f\omega)}.\int_r^{\omega'}\frac{(A+Ba)da}{\sqrt{(fa)}}+w\sqrt{(f\omega)}+\text{etc.}$$

donc

$$w'\sqrt{(f\omega')}-w\sqrt{(f\omega)}=\sqrt{(f\omega)}.\int_r^{\omega'}\frac{(A+Ba)da}{\sqrt{(fa)}}-\sqrt{(f\omega')}.\int_r^{\omega}\frac{(A'+B'x)dx}{\sqrt{(fx)}}+\text{etc.}$$

Pag. 180. Pour l'expression de $\Pi(c)$ et de $\Pi(-1+\sqrt{(1-c^2)})$ voyez *Legendre* exerc. de calc. int. T. I pag. 69 et pag. 75.

Pag. 181. $\frac{fx}{\varphi x}=\frac{Q}{P}$ étant une fonction impaire, il faut que l'une des fonctions Q et P soit paire et l'autre impaire.

Si Q est une fonction paire, P une fonction impaire et $\mu+\mu'=2\nu$ on a $\delta(P^2+Q^2R)=4\nu$, δ signifiant le degré de la fonction. Donc δP ne peut surpasser 2ν, et comme δP est impair, $\delta P=2\nu-1$ au plus; donc $2\delta Q+4=4\nu$ et par là $\delta Q=2\nu-2$. Or $\delta P-\delta Q>0$; donc $\delta P>2\nu-2$, et par suite $\delta P=2\nu-1$. Si $\mu+\mu'=2\nu+1$, on a $\delta(P^2+Q^2R)=4\nu+2$; donc $2\delta Q+4=$ ou $<4\nu+2$; donc $\delta Q=$ ou $<2\nu-1$; et comme δQ est pair, $\delta Q=2\nu-2$ au plus. Il faut donc que $2\delta P=4\nu+2$; donc $\delta P=2\nu+1$.

De la même manière on détermine le degré de Q et de P, lorsque Q est une fonction impaire et P une fonction paire.

Pag. 191. "*Lagrange* a fait voir qu'on peut ramener la résolution d'une équation du degré à celle de équations respectivement des degrés à l'aide d'une équation du degré ." Ainsi avec les 4 lacunes marquées cet endroit se trouve dans le cahier de l'auteur. *Lagrange* a démontré que la résolution de toute équation du degré m, si m est un nombre premier, peut être réduite à la résolution de deux équations respectivement des degrés $m-1$ et $1.2.3\ldots(m-2)$. Si au contraire m est un nombre composé égal à np, n étant premier, la résolution de l'équation du degré m peut être ramenée à la résolution de n équations du degré p, et à une équation du degré $n-1$ dont les coefficiens dépendent d'une équation du degré $\frac{1.2.3\ldots m}{n(n-1)(1.2.3\ldots p)^n}$. Voyez *Lagrange* traité de la résolution des équations numériques, note XIII pag. 245, et mémoires de l'académie de Berlin, année 1771 pag. 138.

Pag. 194. Le produit $y_2.y'_2.y''_2\ldots y_2^{(\mu_1-1)}$ étant fonction symétrique des racines de l'équation

$$u^{\mu_1} - R_1 = 0,$$

sera fonction rationnelle de R_1; et le produit $y'_2 . y''_2 \ldots y_2^{(\mu_1 - 1)}$ étant fonction symétrique des racines de l'équation

$$\omega^{\mu_1 - 1} + \omega^{\mu_1 - 2} + \ldots + \omega^2 + \omega + 1 = 0,$$

sera fonction rationnelle des coefficiens de cette équation et par suite indépendant de ω.

Pag. 197. L'équation $\sqrt[\mu_1]{y_1} = - s_0$ est impossible, car en vertu de l'hypothèse il est impossible d'exprimer l'un des radicaux rationnellement en les autres. Voy. pag. 194.

Le théorème II est une conséquence des équations (β). En effet la substitution de l'expression $p_0 + p_1 . \sqrt[\mu_1]{y_1} + \ldots$ pour y dans l'équation $\varphi(y, m) = 0$, donnera un résultat de la forme (α) où t_0, t_1, t_2 etc. sont exprimés rationnellement en y_1; donc ces quantités restent invariables par la subtitution de $\omega y_1^{\frac{1}{\mu_1}}$, $\omega^2 y_1^{\frac{1}{\mu_1}}$ etc. pour y_1, en remarquant que $y_1 = \left(y_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)^{\mu_1} = \left(\omega y_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)^{\mu_1} = \left(\omega^2 y_1^{\frac{1}{\mu_1}}\right)^{\mu_1} =$ etc.

Pag. 198. Le théorème III est démontré T. I pag. 15 et 16. De ce théorème il suit immédiatement que, si deux équations irréductibles du même degré ont une racine commune, ils sont nécessairement identiques.

Pag. 202. Si dans l'équation (a) on n'avait pas $t_1 = 0$, $t_2 = 0 \ldots t_{\mu - 1} = 0$, on aurait $s^{\frac{1}{\mu}}$ égal à une fonction rationnelle de s, s_1, p_1, p'_1, p_2, p'_2 etc. et par là z_1 égal à une fonction rationnelle des mêmes quantités. Cela posé, les quantités s', p'_1, $p'_2 \ldots$ ou peuvent s'exprimer rationnellement en s, p_1, $p_2 \ldots$ ou non. Dans le premier cas on aurait $s^{\frac{1}{\mu}}$ rationnel en s, p_1, $p_2 \ldots$, ce qui est contre l'hypothèse, et dans le second, l'équation irréductible, à laquelle doit satisfaire z_1, serait d'un degré dont l'exposant serait un nombre composé, savoir le produit de μ et de l'exposant extérieur μ_1 qui se trouve dans l'expression de z_1 en s, s_1, p_1, p'_1, p_2, p'_2 etc. Mais cela étant de même contre l'hypothèse, on en conclut que $t_1 = 0$, $t_2 = 0 \ldots t_{\mu - 1} = 0$. Ces équations ayant lieu, il est clair que l'équation (a) sera satisfaite si au lieu de $s^{\frac{1}{\mu}}$ on y met $\omega s^{\frac{1}{\mu}}$, $\omega^2 s^{\frac{1}{\mu}} \ldots \omega^{\mu - 1} . s^{\frac{1}{\mu}}$.

Pag. 203, 204. De l'équation

$$p'_0 + p'_1 s'^{\frac{1}{\mu}} + p'_2 s'^{\frac{2}{\mu}} + \ldots = p_0 + \omega p_1 s^{\frac{1}{\mu}} + \ldots + \omega^\nu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} + \ldots$$

on tire en y substituant pour $s'^{\frac{1}{\mu}}$ sa valeur $q_\nu . s^{\frac{\nu}{\mu}}$, en vertu du théorème I:

$$p_1 . q_\nu . s^{\frac{\nu}{\mu}} - \omega^\nu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}} = 0;$$

donc en remettant $s'^{\frac{1}{\mu}}$:

$$p'_1 . s'^{\frac{1}{\mu}} = \omega^\nu p_\nu s^{\frac{\nu}{\mu}}.$$

Si donc on fait $p_1 = 1$ et par suite $p'_1 = 1$, ce qu'on peut toujours faire (voy. tome I pag. 9 et 10), on aura

$$s' = p_\nu^\mu s^\nu.$$

s aura donc ν valeurs différentes. Soient s_1, s_2, $s_3 \ldots s_\nu$ ces valeurs.

Soit de plus

$$\left.\begin{array}{r} s_2 + s_3 + \ldots + s_\nu = R_{\nu-2} \\ s_2 s_3 + s_2 s_4 + \ldots + s_{\nu-1} . s_\nu = R_{\nu-3} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ s_2 s_3 s_4 \ldots s_\nu = R_0 \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

on voit aisément que les quantités R_0, R_1, $R_2 \ldots R_{\nu-2}$ sont des fonctions rationnelles de s et de quantités connues. Savoir $R_{\nu-2} + s_1$, $R_{\nu-3} + s_1 R_{\nu-2}$, $\ldots s_1 R_0$ sont des fonctions symétriques de z_1, z_2, $z_3 \ldots z_\mu$, et par suite des fonctions rationnelles des coefficiens de l'équation proposée. Si l'on désigne par q une quelconque des quantités $p_2 s$, $p_3 s \ldots p_\nu s$ et par q_1, q_2, q_3, $\ldots q_\nu$ les ν valeurs différentes que prendra q en y mettant pour s les valeurs s_1, s_2, $s_3 \ldots s_\nu$, si l'on fait de plus

$$\left.\begin{array}{l} q_1 + q_2 + q_3 + \ldots + q_\nu = a_0 \\ q_1 s_1 + q_2 s_2 + \ldots\ldots + q_\nu s_\nu = a_1 \\ q_1 s_1^2 + q_2 s_2^2 + \ldots\ldots + q_\nu s_\nu^2 = a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_1 s_1^{\nu-1} + q_2 s_2^{\nu-1} + \ldots\ldots + q_\nu s_\nu^{\nu-1} = a_{\nu-1}, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (B)$$

on voit que toutes les quantités a_0, a_1, $a_2 \ldots a_{\nu-1}$ sont symétriques en z_1, z_2, $z_3 \ldots z_{\mu-1}$ et par conséquent rationnelles en les quantités connues.

Les équations (B) donnent

$$\begin{array}{llll}
q_1 s_1^{\nu-1} & + q_2 s_2^{\nu-1} & + \ldots + q_\nu s_\nu^{\nu-1} & = a_{\nu-1} \\
q_1 R_{\nu-2} . s_1^{\nu-2} & + q_2 R_{\nu-2} . s_2^{\nu-2} & + \ldots + q_\nu R_{\nu-2} s_\nu^{\nu-2} & = a_{\nu-2} . R_{\nu-2} \\
q_1 R_{\nu-3} . s_1^{\nu-3} & + q_2 R_{\nu-3} . s_2^{\nu-3} & + \ldots + q_\nu R_{\nu-3} s_\nu^{\nu-3} & = a_{\nu-3} . R_{\nu-3} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
q_1 . R_1 s_1 & + q_2 R_1 s_2 & + \ldots + q_\nu R_1 s_\nu & = a_1 R_1 \\
q_1 . R_0 & + q_2 R_0 & + \ldots + q_\nu R_0 & = a_0 R_0 .
\end{array}$$

En ajoutant et observant qu'en vertu des équations (A) on a

$$\begin{array}{l}
s_1^{\nu-1} + R_{\nu-2} . s_1^{\nu-2} + R_{\nu-3} . s_1^{\nu-3} + \ldots + R_1 s_1 + R_0 = (s_1 - s_2)(s_1 - s_3) \ldots (s_1 - s_\nu) \\
s_2^{\nu-1} + R_{\nu-2} . s_2^{\nu-2} + \ldots \ldots \ldots + R_1 s_2 + R_0 = 0 \\
\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\
s_\nu^{\nu-1} + R_{\nu-2} . s_\nu^{\nu-2} + \ldots \ldots \ldots + R_1 s_\nu + R_0 = 0,
\end{array}$$

on aura

$$q_1 = \frac{a_{\nu-1} + a_{\nu-2} . R_{\nu-2} + \ldots + a_1 R_1 + a_0 R_0}{(s_1 - s_2)(s_1 - s_3) \ldots (s_1 - s_\nu)} .$$

On a donc q_1 rationnel en s et en les quantités connues, tant que le dénominateur n'est pas égal à zéro. Or si $s_1 = s_n$, on aurait

$$(z_1 + \omega^{-1} z_2 + \omega^{-2} z_3 + \ldots)^\mu = (z_1 + \omega_1 z_2 + \omega_2 z_3 + \ldots)^\mu ;$$

donc extrayant la racine, mettant pour le premier membre sa valeur $s^{\frac{1}{\mu}}$, et dans le second membre au lieu de $z_1, z_2, z_3 \ldots$ leurs valeurs, on aura

$$\begin{array}{rllll}
s^{\frac{1}{\mu}} = & p_0 + & s^{\frac{1}{\mu}} + & p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots \\
& + \omega_1 p_0 & + \omega_1 \omega\, s^{\frac{1}{\mu}} & + \omega_1 \omega^2 p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots \\
& + \omega_2 p_0 & + \omega_2 \omega^2 s^{\frac{1}{\mu}} & + \omega_2 \omega^4 p_2 s^{\frac{2}{\mu}} + \ldots \\
& + \text{etc.} & &
\end{array}$$

donc
$$1 = 1 + \omega_1 \omega + \omega_2 \omega^2 \ldots + \omega_{\mu-1} \omega^{\mu-1},$$

ce qui est impossible. Il est donc impossible que $s_1 = s_n$, et par conséquent on a $q_1 = p_m s$ exprimé rationnellement en s et en les quantités connues. Il suit de là que

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + f_2(s) . s^{\frac{2}{\mu}} + f_3(s) . s^{\frac{3}{\mu}} + \ldots + f_{\mu-1}(s) . s^{\frac{\mu-1}{\mu}} ,$$

où p_0, $f_2(s)$, $f_3(s) \ldots f_{\mu-1}(s)$ sont des fonctions rationnelles de s et de quantités connues.

Pag. 205. Ayant

$$s^{\frac{1}{\mu}} = p_\alpha^{(k-1)} . \left(p_\alpha^{(k-2)}\right)^{m^\alpha} \dots \left(p_\alpha^0\right)^{m^{(k-1)\alpha}} . s^{\frac{m^{\alpha k}}{\mu}},$$

on a en divisant par $s^{\frac{1}{\mu}}$:

$$1 = p_\alpha^{(k-1)} . \left(p_\alpha^{(k-2)}\right)^{m^\alpha} \dots \left(p_\alpha^0\right)^{m^{(k-1)\alpha}} . s^{\frac{m^{\alpha k}-1}{\mu}}.$$

De cette équation on conclut que $\frac{m^{\alpha k}-1}{\mu}$ est un nombre entier, en remarquant que les quantités $p_\alpha^{(k-1)}$, $p_\alpha^{(k-2)} \dots p_\alpha^0$ sont des fonctions rationnelles de s et de quantités connues.

m étant une racine primitive pour le module μ, les seules puissances de m qui divisées par μ donnent le reste 1, sont de la forme $m^{(\mu-1)n}$ où n est un entier. Donc si $\frac{m^{\alpha k}-1}{\mu}$ est un nombre entier, on a $\alpha k = (\mu - 1)n$. Réciproquement si $\alpha k = (\mu - 1)n$, $\frac{m^{\alpha k}-1}{\mu}$ sera un entier. Si k est le moindre nombre entier qui satisfasse à la condition $\frac{m^{\alpha k}-1}{\mu}$ égal à un entier, k et n seront premiers entre eux dans l'équation $\alpha k = (\mu - 1)n$. En effet si $k = k'p$, $n = n'p$, on aurait $\alpha k' = (\mu - 1)n'$ et par là $\frac{m^{\alpha k'}-1}{\mu}$ égal à un entier; mais $k' < k$ et par suite k ne serait pas le moindre nombre entier satisfaisant à la condition $\frac{m^{\alpha k}-1}{\mu}$ égal à un entier, ce qui est contre l'hypothèse. Donc n et k sont premiers entre eux. Il suit de là que $\mu - 1$ est divisible par k. Soit donc $\frac{\mu-1}{k} = \beta$, on a $\alpha = \beta n$.

Si toutes les racines de l'équation en s du degré ν ne sont pas comprises dans la série $s, s_1, s_2, \dots s_{k-1}$, soit $\sigma = q^\mu . s^{m^{n'\beta'}}$ une autre racine; $\sigma_1 = p^\mu . \sigma^{m^{n\beta}}$ en sera encore une. De ces deux équations on tire

$$\sigma_1^{\frac{1}{\mu}} = p . q^{m^{n\beta}} . \left(s^{m^{n'\beta'}}\right)^{\frac{m^{n\beta}}{\mu}} = q_1 . s^{\frac{m^{n\beta+n'\beta'}}{\mu}}$$

où q_1 est rationnel en s.

Pag. 207. La première expression de z_1 pag. 207 est une suite immédiate de la forme

$$z_1 = p_0 + s^{\frac{1}{\mu}} + p_1 . s^{\frac{m}{\mu}} + p_2 . s^{\frac{m^2}{\mu}} + \dots + p_{\mu-2} . s^{\frac{m^{\mu-2}}{\mu}}$$

en remarquant que $\mu - 1 = \nu\alpha$.

On sait que $s_n^{\frac{1}{\mu}}$ est de la forme $f_n(s).s^{\frac{m^{n\alpha}}{\mu}}$;

donc $$s_n^{\frac{m^\delta}{\mu}} = (f_n(s))^{m^\delta}.s^{\frac{m^{n\alpha+\delta}}{\mu}},$$

et de là $$f_n^{(\delta)}(s).(f_n(s))^{-m^\delta}.s_n^{\frac{m^\delta}{\mu}} = f_n^{(\delta)}(s).s^{\frac{m^{n\alpha+\delta}}{\mu}} = \varphi_\delta(s_n).s_n^{\frac{m^\delta}{\mu}},$$

d'où l'on tire la seconde expression de z_1 pag. 207.

Pag. 211. Si le degré de la fonction entière $\psi(x)$ est moindre que celui de la fonction entière $\lambda(x)$ on a

$$\frac{\psi(x_1)}{\lambda(x_1)} + \frac{\psi(x_2)}{\lambda(x_2)} + \ldots + \frac{\psi(x_\mu)}{\lambda(x_\mu)} = 0.$$

Démonstration. Soit $\psi x = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ldots + \alpha_n x^n$, on aura

$$\frac{\psi x}{\lambda(x)} = \frac{\alpha_0}{\lambda(x)} + \alpha_1 . \frac{x}{\lambda(x)} + \alpha_2 . \frac{x^2}{\lambda(x)} + \ldots + \alpha_n . \frac{x^n}{\lambda(x)};$$

donc

$$\sum_1^\mu {}_m \frac{\psi(x_m)}{\lambda(x_m)} = \alpha_0 \sum_1^\mu {}_m \frac{1}{\lambda(x_m)} + \alpha_1 \sum_1^\mu {}_m \frac{x_m}{\lambda(x_m)} + \alpha_2 \sum_1^\mu {}_m \frac{x^2_m}{\lambda(x_m)} + \ldots + \alpha_n \sum_1^\mu {}_m \frac{x^n_m}{\lambda(x_m)}.$$

Or lorsque $\nu < \mu$, on sait que $\sum_1^\mu {}_m \left(\frac{x^\nu_m}{\lambda(x_m)}\right) = 0$. (Voy. la formule (28) p. 76).

Donc

$$\sum_1^\mu {}_m \frac{\psi(x_m)}{\lambda(x_m)} = 0.$$

On aura par conséquent

$$\varphi(\pm\theta_1 \pm \theta_2 \pm \cdots \pm \theta_\mu) = C.$$

C'est ce théorème que l'auteur a mentionné tom. I pag. 330.

Pag. 212. Ayant $$\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}},$$

on aura

$$\frac{d\theta}{dx} = \theta' = 1 + \tfrac{1}{2}.x^4 + \frac{1.3}{2.4}.x^8 + \frac{1.3.5}{2.4.6}.x^{12} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.x^{4n} + \ldots;$$

donc en intégrant et remarquant que θ s'évanouit en même temps que x:

$$\theta = x + \tfrac{1}{2}.\frac{x^5}{5} + \frac{1.3}{2.4}.\frac{x^9}{9} + \frac{1.3.5}{2.4.6}.\frac{x^{13}}{13} + \ldots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots 2n}.\frac{x^{4n+1}}{4n+1} + \ldots$$

Cette équation fait voir qu'en désignant $\frac{d^p\theta}{dx^p}$, lorsqu'on y fait $x=0$, par $\theta_0^{(p)}$, on aura pour une valeur entière quelconque de n:

$$\theta_0^{(4n)} = \theta_0^{(4n-1)} = \theta_0^{(4n-2)} = 0$$

et $$\frac{\theta_0^{(4n+1)}}{1.2.3\ldots(4n+1)} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots\ 2n}.\frac{1}{4n+1}.$$

Maintenant

$$\frac{dx}{d\theta} = \varphi'\theta = \frac{1}{\theta'},\quad \varphi''\theta = -\frac{\theta''}{\theta'^2},\quad \varphi'''\theta = -\frac{\theta'''}{\theta'^2} + \frac{2\theta''^2}{\theta'^3}\ \text{etc}$$

On voit par là que la fonction $\varphi\theta$ aura la forme

$$\varphi\theta = \theta + \frac{A_1.\theta^5}{1.2.3.4.5} + \frac{A_2.\theta^9}{1.2\ldots9} + \ldots + \frac{A_n.\theta^{4n+1}}{1.2.3\ldots(4n+1)} + \ldots \qquad (a)$$

En développant la fonction $\varphi\left(\alpha.\frac{\omega}{2}\right)$ suivant les puissances de α on obtiendra

$$\varphi\left(\alpha.\frac{\omega}{2}\right) = \frac{4\pi}{\omega}\left\{\begin{array}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{e^{\pi}+1}\left\{\alpha.\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^n.\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \ldots\right\} \\ -\frac{e^{\frac{3\pi}{2}}}{e^{3\pi}+1}\left\{3\alpha.\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{3\alpha\pi}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^n.3^{2n+1}.\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \ldots\right\} \\ +\frac{e^{\frac{5\pi}{2}}}{e^{5\pi}+1}\left\{5\alpha.\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2.3}\left(\frac{5\alpha\pi}{2}\right)^3 + \ldots + \frac{(-1)^n.5^{2n+1}.\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right)^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n+1)} + \ldots\right\} \\ \text{etc.} \end{array}\right\}$$

Faisant $\theta = \frac{\alpha\omega}{2}$ dans l'équation (a) ci-dessus et comparant les coefficiens des deux développements de $\varphi\left(\alpha.\frac{\omega}{2}\right)$, on trouvera les deux premières formules de l'auteur. La troisième se trouve par un procédé semblable.

Pag. 224. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-v^2t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}.e^{\frac{1}{4v^2}}.$

Demonstration. On a

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{2.3} + \ldots + \frac{t^n}{2.3.4\ldots n} + \ldots$$

donc en multipliant par $e^{-v^2t^2}.dt$ et intégrant:

$$\int e^{t-v^2t^2}.dt = \int e^{-v^2t^2}.dt + \int e^{-v^2t^2}.tdt + \tfrac{1}{2}\int e^{-v^2t^2}.t^2dt + \ldots$$

Or $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2}.t^{2p+1}.dt = 0$ et $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2t^2}.t^{2p}dt = \frac{1.3.5.7\ldots(2p-1)\sqrt{\pi}}{2^p.v^{2p+1}}$;

donc $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-v^2t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}\left(1 + \frac{1}{4v^2} + \frac{1}{2}.\frac{1}{(4v^2)^2} + \frac{1}{2.3}\cdot\frac{1}{(4v^2)^3} + \ldots\right)$;

c'est-à-dire $\int_{-\infty}^{\infty} e^{t-v^2t^2}.dt = \frac{\sqrt{\pi}}{v}.e^{\frac{1}{4v^2}}.$

Pag. 227. Voyez pag. 46.

FIN DU TOME SECOND.

Fautes à corriger.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
24.	7.	$= P - \frac{1}{a} . \log \frac{x^a - 1}{x - 1}$.	$= \frac{x^m}{m} + P - \frac{1}{a} . \log \frac{x^a - 1}{x - 1}$.
—	8.	$= P'' - P' - \frac{1}{a} . \log a$.	$= \frac{1}{m} + P'' - P' - \frac{1}{a} . \log a$.
—	14.	$a = 1$ donne $L(2) = 1$.	$a = 1$ et $m = 1$ donne $L(2) = 1$.
25.	9.	$L\, 1 + \left(\frac{2m'}{2(2a'+1)}\right)$.	$L\left(1 + \frac{2m'}{2(2a'+1)}\right)$.
38.	14.	$\cdot \frac{d^{m+n}\left(\frac{\Gamma a . \Gamma c}{\Gamma(a+c)}\right)}{(da)^m . (dc)^n}$.	$= \frac{d^{m+n}\left(\frac{\Gamma a . \Gamma c}{\Gamma(a+c)}\right)}{(da)^m . (dc)^n}$.
43.	6.	$\frac{x^{a-1}}{a^{\alpha-2}}$.	$\frac{x^{a-1}}{a^{\alpha-1}}$.
44.	21.	ds.	s.
48.	2.	$A_{0,n}$.	$A_{0,n} . \frac{1}{v}$.
—	6.	dx.	dx^2.
—	7.	dx.	dx^3.
53.	12.	$a_1 = 1$.	$a_1 = -1$.
55.	25.	$n + 2$.	$n + 1$
63.	12.	$v_{m-1} . \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} + \frac{s_m}{x - a} . \frac{d^m y}{dx^m}$.	$v_{m-2} . \frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} + \frac{s_m}{x - a} . \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$.
65.	10.	$\gamma\left(\varepsilon z - \frac{dz}{da}\right)$.	$-\gamma\left(\varepsilon z - \frac{dz}{da}\right)$.
68.	8.	x_n	x_μ.
75.	21.	$\frac{d\varphi\delta}{da_n}$.	$\frac{d\varphi\delta}{da_m}$.
77.	4.	$e^{xu+yv+zq}$.	$e^{xu+yv+zp}$.
80.	1.	$\delta_1{}^{n^1}\delta_2{}^{n^2}$.	$\delta_1{}^{n_1}\delta_2{}^{n_2}$.
81.	14.	$e^{v\alpha} - a$.	$(e^{v\alpha} - a) . fv$.
114.	11.	$\int \frac{(k+k')x}{(x-a)\sqrt{R}}$.	$\int \frac{(k+k'x)dx}{(x-a)\sqrt{R}}$.
118.	6.	$\frac{C'_1}{D_1} . x$.	$\frac{C'_1}{D_2} . x$.
—	8.	L.	L'.
—	9.	L'.	L.
—	12.	G.	$-G$.
—	13.	H.	$-H$.
130.	23.	$-i\mu\sqrt{\varphi}$.	$-i\mu\sqrt{(\varphi a)}$.
132.	dernière	$(a' - ''')$.	$(a' - a''')$.
150.	10.	sQ_2	sQ_2^2.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
153.	dernière	Q.	Q_1.
162.	5.	$\frac{c_{n-1}}{p_{x-1}}$.	$\frac{c_{n-1}}{p_{n-1}}$.
171.	14.	du troisième espèce.	de troisième espèce.
185.	2.	et.	est.
197.	2.	$z^{\mu_1} = y_1 = 0$.	$z^{\mu_1} - y_1 = 0$.

Dans le tome Ier il se trouve encore les fautes suivantes.

Pages.	Lignes.	Fautes.	Corrections.
11.	7.	$p^n = z$.	$p^{\frac{1}{n}} = z$.
57.	4.	$a^{\pm 1} . \mu_{n-1}$.	$a^{\mp 1} . \mu_{n-1}$.
58.	6.	$r_{m-n} = r_{n-1}$.	$r_{m-n} = r_n$.
69.	1.	$< \rho_{m+n}$.	$< \rho_m$.
96.	18.	$\Gamma(\alpha + \beta)$.	$\Gamma(\beta + \gamma)$.
186.	3.	2^{n+1}.	$2^n + 1$.
291.	22.	(16).	(18).
339.	14.	est égal à μ.	par rapport à x^2 est égal à μ.
365.	8.	$(x^2 - \alpha_2)$.	$(x^2 - \alpha_2^2)$.
414.	25.	$\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ aura nécessairement m valeurs différentes.	$\sqrt[m]{(\alpha^2 - \beta^2 s^2)}$ ou sera symétrique ou aura nécessairement m valeurs différentes.
—	29.	Donc si cette fonction n'est pas symétrique m sera égal à 2 ou à 5.	(*Ces mots doivent être supprimés*).
415.	12.	*Chauchy.*	*Cauchy.*

Table des matières

contenues dans ce volume.

